ЭЛЕКТРОНЫ ПРОВОДИМОСТИ В ПОЛЕ СИЛ ИНЕРЦИИ

И. М. ЦИДИЛЬКОВСКИЙ
Институт физики металлов Уральского отделения Российской Академии наук, Екатеринбург

CONDUCTION ELECTRONS IN AN INERTIAL FIELD

I. M. TSIDILKOVSKY

The behavior of the conduction electron of a solid in an inertial field is described. The classical Tolman and Barnett electroinertial experiments are analyzed. The problem of why the measured quantities in inertial fields are determined by the free electron mass and charge, and not by conduction electron or hole effective mass and charge, as in the case of an electromagnetic field, is explained.

Рассказано о поведении электронов проводимости твердого тела в поле сил инерции. Проанализированы классические электронно-инерционные опыты Толмена и Барнетта и объяснено, почему измеряемые величины в поле сил инерции определяются массой и зарядом свободного электрона, а не эффективной массой и зарядом электрона проводимости или дырки, как в случае электромагнитного поля.

www.issep.rssi.ru

ВВЕДЕНИЕ

В твердом теле атомные электронные уровни расширяются в разрешенные для электронов энергетические зоны. Деление твердых тел на металлы и полупроводники (диэлектрики) основано на различии характера заполнения электронами зон. Если наиболее высокий заполненный уровень энергии лежит внутри зоны и, значит, зона заполнена лишь частично, то твердое тело – металл. Заполненные и свободные состояния в металле перекрываются, между ними нет интервалов запрещенных энергий. Если же часть зон заполнена целиком, а более высокие по энергии зоны отделены энергетическими щелями (запрещенными зонами) от самой верхней заполненной зоны и при $T = 0$ K свободны от электронов, то вещество является полупроводником. В полупроводнике электроны валентных оболочек образуют валентную зону, целиком заполненную при $T = 0$ K, и зону проводимости, свободную от электронов при $T = 0$ K. Эти зоны отделены друг от друга энергетической щелью.

Величина электропроводности вещества зависит от заполнения электронами этих наиболее высоких по энергии зон. Действительно, процесс протекания электрического тока связан с ускорением электронов внешним электрическим полем. При этом энергия электронов, естественно, увеличивается, и электроны должны переходить в более высокие по энергии состояния. Такие переходы возможны при условии, что эти состояния свободны. В переносе заряда могут участвовать только электроны частично заполненных зон – электроны проводимости. При возбуждении электронов светом, теплом или иными воздействиями достаточной энергии для преодоления электроном щели между заполненной валентной зоной и зоной проводимости в валентной зоне образуются свободные состояния – дырки, которые ведут себя подобно частицам с положительным зарядом. В металлах, где заполненные и свободные состояния смыкаются, электроны могут ускоряться, то есть участвовать в токе, под действием самых слабых электрических полей при $T = 0$ K.

Поведение системы электронов определяется их энергетическим спектром. Для данной энергетической зоны связь между энергией $\mathscr{E}$ и импульсом $\mathbf{p}$ целиком определяет динамические свойства системы электронов. Для отдельного электрона зависимость $\mathscr{E}(\mathbf{p})$ есть не что иное, как связь между частотой электронных волн де Бройля $\upsilon = \mathscr{E}/h$ и волновым вектором $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ ($\hbar = h/2\pi$). Зависимость $\mathscr{E}(\mathbf{p})$ называется законом дисперсии электронов. Для свободного электрона с массой m_0 при скоростях, малых по сравнению со скоростью света, закон дисперсии имеет хорошо известный вид $\mathscr{E} = p^2/(2m_0)$. Простота этого закона обусловлена однородностью и изотропностью пространства. В кристалле, где атомы расположены в узлах кристаллической решетки, произвольно выбранные различные точки и направления в пространстве в общем случае неэквивалентны. Это является причиной усложнения закона дисперсии электронов в твердом теле по сравнению с законом дисперсии свободного электрона (см. приложение).

Эффективная масса m в ряде отношений, в частности как характеристика динамических свойств электронов и дырок в кристалле, играет роль массы свободного электрона m_0.

Эффективная масса электрона в кристалле отражает те особенности, которые отличают его от свободного электрона. В кристалле электрон подвержен действию сил решетки – ионов и других электронов, которые значительно превосходят все практически возможные внешние силы. Даже электрические поля ~10^5 В/см, вызывающие пробой, при перемещении электрона на расстояние порядка постоянной решетки (10^{-8} см) производят работу ~10^{-3} эВ, тогда как потенциальная энергия электрона в кристалле изменяется в пределах элементарной ячейки на несколько электронвольт. Это и позволяет свести задачу о движении электрона в кристалле под действием внешней силы к задаче о движении частицы с законом дисперсии, отличным от простого квадратичного $\mathscr{E} = \hbar^2k^2/(2m_0)$, в поле одной только внешней силы.

Уравнение движения электрона в кристалле можно записать в виде

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_i = m_0\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{F}$ – внешняя сила, $\mathbf{F}_i$ – сила, действующая на электрон со стороны решетки, $\mathbf{v}$ – скорость электрона. Динамика электронов характеризуется тензором обратной эффективной массы (см. (IV) в приложении). Поэтому вместо уравнения (1) можно пользоваться уравнением

$$\mathbf{m}^{-1}\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{m}^{-1}$ есть тензор обратной эффективной массы с компонентами (IV). В случае изотропного квадратичного закона дисперсии уравнение (2) принимает вид

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \qquad (3)$$

Таким образом, m – это такая масса, при которой учет одних внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на электрон проводимости, дает истинную величину его ускорения $d\mathbf{v}/dt$.

Поразительная особенность электрона в кристалле, отличающая его от свободного электрона, заключается в том, что эффективная масса может принимать не только положительные, но и отрицательные значения. Действительно, в верхней части зоны, где функция $\mathscr{E}(\mathbf{k})$ имеет максимум, вторая производная от энергии по волновому вектору отрицательна. Поэтому электрон вблизи верхнего края зоны под действием силы, направленной вдоль направления движения, должен замедляться, а не ускоряться.

Действие очень больших (по сравнению с внешними) сил кристаллической решетки сводится к тому, что масса свободного электрона заменяется эффективной массой и движение электрона проводимости рассматривается лишь под действием внешних сил. Но поскольку мы внесли действие сил решетки в эффективную массу, нас не должны удивлять аномалии этой характеристики, то есть существенное отличие ее от обычной массы. В частности, электрон у верхнего края зоны, где его групповая скорость $\mathbf{v} = \frac{1}{\hbar}\nabla_{\mathbf{k}}\mathscr{E}(\mathbf{k}) = 0$, должен вести себя аномально с точки зрения классической механики. Под действием внешней силы $\mathbf{F} = \hbar\frac{d\mathbf{k}}{dt}$, совпадающей по направлению со скоростью, электрон будет переходить в состояния со все более высокой энергией, пока не достигнет вершины зоны, где $\mathbf{v} = 0$. Иными словами, несмотря на то что энергия электрона при приближении к верхнему краю зоны возрастает, действие сил решетки приводит к уменьшению его скорости, которая у максимума зоны становится равной нулю. Таким образом, именно силы решетки ответственны за странное поведение электрона у верхнего края зоны.

Целью дальнейшего изложения является рассмотрение поведения электронов проводимости в поле сил инерции. Следует ответить на вопросы, можно ли при воздействии на проводник инерционных сил описывать динамику электронов в твердом теле квазиклассическим уравнением движения и почему измеряемые в электронно-инерционных опытах величины зависят от массы и заряда свободного электрона, а не от эффективной массы и заряда электрона или дырки, как в случае действия электромагнитного поля.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ИДЕИ МАКСВЕЛЛА

Проблема поведения носителей заряда твердого тела, подверженного действию инерционных или гравитационных сил, в настоящее время как будто потеряла свою остроту. (Для краткости будем говорить только об инерционных силах, поскольку действие гравитационных и инерционных сил эквивалентно.) Действительно, общеизвестно, сколь велики успехи теории твердого тела, и трудно представить себе, что до сравнительно недавнего времени в таких устоявшихся вопросах, как динамика носителей заряда, и в частности движение их в поле сил инерции, оставалось еще что-либо невыясненное. Ведь упоминаемые во многих монографиях и учебных пособиях по физике твердого тела и общей физике опыты Р. Толмена и Т. Стюарта были выполнены в 1916 году. А первые исследования электронно-инерционных эффектов, доказавшие, что электропроводность металлов обусловлена свободными электронами, Л.И. Мандельштам и Н.Д. Папалекси произвели в Страсбурге в 1912–1914 годах – за несколько лет до опытов американцев Р. Толмена и Т. Стюарта.

Несмотря на то что правильная интерпретация электронно-инерционных опытов Толмена с сотрудниками (1916–1926 годы) была дана давно Ч. Дарвином (1936 год) и В.Л. Гинзбургом [1], в современной литературе, в том числе в монографиях и учебных пособиях для высшей школы, нередко встречаются путаные, некорректные объяснения поведения электронов и дырок в поле сил инерции. Такая путаница приводит к серьезным недоразумениям и неправильному толкованию электронно-инерционных экспериментов. Поэтому проблема поведения электронов и дырок в кристалле, находящемся в поле сил инерции, несмотря на ее почтенный возраст, не потеряла своей актуальности.

Если правильное объяснение опытов Толмена было дано Дарвином еще в 1936 году, то инерционные опыты С. Барнетта до 1975 года вообще не имели удовлетворительного объяснения и были правильно интерпретированы в работе [2].

Известна попытка С. Брауна и С. Барнетта [3], предпринятая в 1952 году в связи с результатами измерений обращенного опыта Толмена, поставить под сомнение основные представления зонной теории твердого тела. Исходя из того, что у металлов Mo, Zn и Cd, у которых знак эффекта Холла положительный, найденное в инерционных опытах отношение массы к заряду носителей тока по знаку и величине (с точностью порядка процента) оказалось равным $m_0/(-e)$, как для свободных электронов, Браун и Барнетт заключили: “Предположение о том, что положительный эффект Холла можно объяснить, считая отношение массы к заряду носителей тока положительным, опровергнуто, поскольку на опыте это отношение отрицательно и для металлов с положительным коэффициентом Холла”. Утверждение авторов [3], опровергающее, по их мнению, основы квантовой теории твердого тела, было подвергнуто решительной критике Н. Ростокером [4], В. Шокли [5] и В.Л. Гинзбургом [1]. Однако ни в статьях этих авторов, ни в других работах, опубликованных до 1975 года, не было дано удовлетворительного объяснения опытов Барнетта.

Итак, несмотря на то что электронно-инерционным эффектам, открытым более 80 лет назад, было посвящено немало работ и уделено внимание в учебниках и монографиях (см., например, [6]), они нуждались в корректной интерпретации. Необходимо было дать четкий ответ на ряд вопросов, в частности:

1. Можно ли для сил неэлектромагнитной природы описать движение носителей заряда твердого тела квазиклассически, то есть с помощью уравнения движения Ньютона?

2. Почему в формулы для электронно-инерционных эффектов входит масса свободного электрона m_0, а не эффективная масса m?

3. Почему независимо от знака эффекта Холла у всех исследованных металлов знак носителей заряда в электронно-инерционных опытах всегда получается отрицательным?

Ниже мы попытаемся ответить на эти вопросы.

Идея электронно-инерционных опытов была высказана Максвеллом в 1873 году в “Трактате об электричестве и магнетизме”. Еще в 1801 году А. Вольта на основании открытого им явления взаимной электризации разнородных металлов при их контакте высказал гипотезу о том, что в металлах существуют свободно движущиеся электрические заряды. Максвелл отметил, что эта важная гипотеза нуждается в экспериментальной проверке. Он предложил подвесить в пространстве, где магнитное поле Земли скомпенсировано, металлическую катушку с вертикально направленной образующей и прикрепить к спирали сверху и снизу подвесные нити, которые одновременно являлись бы токоподводящими проводами. Максвелл писал: “Если электричество подобно текущей жидкости, то в момент включения тока, когда его скорость еще устанавливается, необходимо действие какой-то силы, которая сообщила бы момент количества движения жидкости, текущей по спирали. Поскольку такой силой может быть лишь сила упругости нити подвеса, то катушка должна повернуться, и этот поворот можно будет наблюдать зеркальным отсчетом". Так как этого явления ранее никто не наблюдал, то, по мнению Максвелла, либо имеются две жидкости противоположных знаков, текущие навстречу друг другу, либо нужно признать "полный крах наших предположений". "Узнать эти вещи значило бы по крайней мере начать создавать полную динамическую теорию электричества", – писал Максвелл.

В 1912–1914 годах С.Л. Мандельштам и Н.Д. Папалекси впервые попытались обнаружить электронно-инерционный эффект у металлов. Замысел их опыта заключался в следующем. Если быстро движущийся кусок металла остановить, то в момент остановки его электроны проводимости должны по инерции продолжать двигаться и это движение должно проявиться как всплеск (толчок) электрического тока. Аналогичный эффект, но в противоположном направлении должен иметь место в момент начала движения металла.

Авторам удалось зафиксировать толчки тока по звуку в телефоне, соединенном с колеблющейся катушкой медной проволоки. Эти опыты, к сожалению, не были полностью завершены.

В опытах Толмена и Стюарта катушка из металлической проволоки (Cu, Ag, Al) приводилась во вращение вокруг своей оси и затем в течение доли секунды останавливалась. Тогда по электрической цепи, которая состояла из катушки, баллистического гальванометра и гибких проводов, соединявших концы катушки с гальванометром, пробегал импульс тока. Гальванометром измеряли количество электричества Q, прошедшее по катушке за время ее торможения.

В другой постановке опытов Толмена с сотрудниками (1923, 1926 годы) пустотелый металлический цилиндр совершал крутильные колебания вокруг своей оси. В расположенной рядом катушке из металлической проволоки вследствие ускорения цилиндра при колебаниях индуцировался электрический ток, который измеряли вибрационным гальванометром.

С. Барнетт с сотрудниками [3] осуществили опыт, предложенный Максвеллом: они измеряли механический импульс P, возникавший в проволочной катушке при изменении силы протекавшего в ней тока (обращенный опыт Толмена). Через вертикально подвешенную на тонкой нити небольшую катушку пропускали переменный ток, который вызывал колебания катушки вокруг своей оси. Чтобы повысить точность измерений, применяли специальное компенсирующее устройство. На оси исследуемой катушки укрепляли маленькие магнитики, вокруг которых располагалась неподвижная компенсационная катушка. При протекании переменного тока через исследуемую катушку в компенсационной катушке индуцировалась электродвижущая сила, и переменное магнитное поле, создававшееся в этой катушке, действовало на магнитики. Таким образом, с одной стороны, при прохождении переменного тока через исследуемую катушку вследствие инерции электронов в ней возникала пара сил с моментом Fr (r – радиус катушки), которая приводила катушку в колебательное движение. С другой стороны, переменное магнитное поле в компенсационной катушке создавало пару сил, действовавшую на исследуемую катушку в обратном направлении. Подобрав величину электрического сопротивления в компенсационной схеме, можно было заставить исследуемую катушку оставаться в покое. Зная момент пары сил Fr, удерживающей катушку в покое, и скорость изменения силы тока dI/dt в ней, можно вычислить отношение массы к заряду носителей тока.

Опыты Толмена. Чтобы уяснить сущность опытов Толмена, представим себе, что катушка состоит из одного витка, то есть что вращается кольцо из тонкой металлической проволоки. При торможении кольца свободные электроны в течение какого-то времени по инерции продолжают двигаться относительно ионов заторможенной кристаллической решетки, в результате чего возникает ток I и некоторое количество электричества Q будет перенесено вдоль окружности кольца.

Исходя из представления об электронах проводимости в металле как о газе свободных частиц, Толмен следующим образом вычислил количество электричества, прошедшее по цепи. Пусть линейная скорость точек вращающегося кольца до начала торможения есть u_0, а ускорение при торможении $w < 0$ (здесь $w = du/dt$ – тангенциальная составляющая ускорения точек вращающегося кольца). Под действием силы инерции $-m\,du/dt$ электроны приобретут относительно решетки ускорение $-w$. Движение электронов будет таким же, как если бы на них действовало электрическое поле с напряженностью E_T, определяемое соотношением

$$-eE_T = -mw, \qquad (4)$$

где m – масса электрона.

В результате смещения электронов относительно ионов в кольце возникает ток I, который определяется уравнением для переменных токов (см. [6])

$$\frac{L}{c^2}\frac{dI}{dt} + RI = \oint E_T dl,$$

где L – коэффициент самоиндукции, R – омическое сопротивление кольца, l – длина окружности кольца. Интегрируя это уравнение по времени от начала торможения t_1 до остановки кольца t_2 ($u(t_1) = u_0$, $u(t_2) = 0$) и полагая, что в начальный и конечный моменты t_1 и t_2

рассматриваемого промежутка времени ток I обращается в нуль, получаем

$$R\int_{t_1}^{t_2} Idt = -\frac{m}{e}\ell u_0. \qquad (5)$$

Количество электричества, прошедшее по цепи за промежуток времени $t_2 - t_1$,

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} Idt = -\frac{m}{e}\frac{u_0\ell}{R}. \qquad (6)$$

Формула (6) позволяет определить отношение массы к заряду m/e носителей тока в металле, а по знаку возникшей разности потенциалов установить знак зарядов, образующих ток. Для исследованных металлов знак носителей заряда оказался отрицательным, а численное значение отношения m/e – близким к величине $m_0/(-e)$, полученной для свободных электронов в опытах с катодными лучами.

Дарвин дал следующее объяснение опытов Толмена. Для упрощения анализа принимается, что металлический стержень движется поступательно с постоянной скоростью вдоль своей длины (скажем, вдоль оси x) и в момент времени t_1 начинает тормозиться с постоянным ускорением $w < 0$ до остановки в момент времени t_2. Изменение состояния электрона в покоящемся или равномерно движущемся проводнике описывается нестационарным уравнением Шрёдингера, которое содержит члены как кинетической, так и потенциальной энергии электрона. Последняя равна $-eU(x, y, z)$, где U – периодический потенциал кристаллической решетки. Если за начало отсчета времени выбрать момент t_1, то член потенциальной энергии электрона в проводнике, движущемся с ускорением w, принимает вид $-eU\left(x - \frac{1}{2}wt^2, y, z\right)$. Введем новые переменные

$$x' = x - \frac{1}{2}wt^2, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t,$$

то есть перейдем к неинерциальной системе координат. Тогда потенциальная энергия электрона приобретает вид

$$-eU(x', y', z') + m_0wx'. \qquad (7)$$

Потенциальная энергия электрона, движущегося в неподвижном проводнике, который помещен в однородное электрическое поле $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$:

$$-eU(x, y, z) + eEx. \qquad (8)$$

Сравнивая выражения (7) и (8), замечаем, что действие на электрон силы инерции $-m_0\mathbf{w}$ эквивалентно действию силы $-e\mathbf{E}$. Инерционная сила $-m_0\mathbf{w}$ ускоряет электрон точно так же, как электрическое поле:

$$\mathbf{E}_T = \frac{m_0}{e}\mathbf{w}. \qquad (9)$$

В.Л. Гинзбург [1] получил слагаемое m_0wx, не совершая преобразования к неинерциальной системе координат – он воспользовался принципом эквивалентности силы инерции и силы тяжести. Согласно этому принципу, движение электрона в системе отсчета, перемещающейся с ускорением $\mathbf{w}$, будет таким же, как и в покоящейся системе при воздействии однородного гравитационного поля с напряженностью $-\mathbf{w}$ и потенциалом wx (ускорение $\mathbf{w}$ направлено вдоль оси x). Потенциальная энергия электрона в таком гравитационном поле равна m_0wx. Эту величину нужно добавить к потенциальной энергии $-eU$ в уравнении Шрёдингера, в котором действие гравитационного поля не учтено. Выражение (9) получается, разумеется, и для реальных условий опытов Толмена, в которых использовалась неравномерно вращающаяся катушка, а не поступательно перемещающийся стержень.

Когда в проводнике возникает стороннее электрическое поле $\mathbf{E}_T$, плотность тока, связанная с этим полем,

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}_T, \qquad (10)$$

где σ – проводимость. Согласно формулам (9) и (10),

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}_T = \sigma\mathbf{w}\frac{m_0}{e}. \qquad (11)$$

Формулы (9) и (11) убеждают нас, что возникающее в ускоренно движущемся проводнике поле Толмена $\mathbf{E}_T$ (и плотность тока $\mathbf{j}$) зависит от массы m_0 свободного электрона, а не от эффективной массы m электрона проводимости. И это понятно: потенциал кристаллической решетки не влияет на величину силы инерции $-m_0\mathbf{w}$, а значит, и на величину поля Толмена $\mathbf{E}_T$.

При всех практически достижимых ускорениях $\mathbf{w}$ поле Толмена $\mathbf{E}_T$ достаточно мало и не может вызвать переходы электронов между зонами. Если в течение промежутка времени dt на электрон в кристалле действует сила электрического поля $-e\mathbf{E}_T$ и потенциальная энергия его изменяется на $e\mathbf{E}_T\mathbf{r}$, то волновая функция электрона, как показал В. Хаустон (1940 год), изменяется в соответствии с соотношением

$$\hbar\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -e\mathbf{E}_T. \qquad (12)$$

В случае квадратичного изотропного закона дисперсии электронов проводимости уравнение (12) приобретает вид (ср. (2)):

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}_T. \qquad (13)$$

Итак, движение электрона проводимости в электрическом поле Толмена $\mathbf{E}_T$ описывается таким же квазиклассическим уравнением, как и в обычном внешнем электрическом поле $\mathbf{E}$.

Приведенные выше результаты для поля Толмена $\mathbf{E}_T$ (9) и плотности тока $\mathbf{j}$ (11) справедливы, очевидно, и в случае дырочного полупроводника. Это следует из того факта, что поле сил инерции действует на электроны независимо от степени заполнения зоны (энергия каждого электрона изменяется на $m_0\mathbf{wr}$), а значит, и от типа проводимости – электронной или дырочной.

Опыты Барнетта. Если электрический ток, создаваемый внешним электрическим полем, постоянный, то средние скорости электронов и ионов тоже постоянны и, следовательно, импульсы систем электронов и ионов остаются неизменными. Если же по проводнику течет переменный ток, возникающий, в частности, при замыкании или размыкании электрической цепи, то импульс системы электронов, как и системы ионов, изменяется. В случае, когда проводник не закреплен, например подвешен на упругой нити, изменение силы тока вызывает изменение импульса $\mathbf{P}$ проводника в целом. Разумеется, если проводник закреплен, то изменения импульсов электронов и ионов передаются через закрепленные концы проводника фиксирующему телу (связи).

Для того чтобы выяснить, какой импульс в единицу времени приобретает проводник вследствие ускорения электронов и ионов внешним электрическим полем $\mathbf{E}$, рассмотрим квазиклассическое уравнение движения электрона проводимости с квадратичным изотропным законом дисперсии

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}. \qquad (14)$$

Представим уравнение (14) в иной форме, для чего явно выпишем все взаимодействия электронов, скрытые в эффективной массе m:

$$m_0\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{E}_s^{ei} - e\mathbf{E}_s^{ee}, \qquad s = 1, 2, \ldots, n, \qquad (15)$$

где $\mathbf{E}_s^{ei}$ есть действующее на электрон эффективное электрическое поле, созданное всеми ионами, $\mathbf{E}_s^{ee}$ есть эффективное поле, характеризующее усредненное действие на s-й электрон всех остальных электронов.

Движение t-го положительно заряженного иона описывается уравнением

$$M\frac{d\mathbf{V}_t}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{E}_t^{ie} + e\mathbf{E}_t^{ii}, \qquad t = 1, 2, \ldots, n, \qquad (16)$$

где $\mathbf{E}_t^{ii}$ – эффективное электрическое поле, характеризующее усредненное действие на t-й ион всех других ионов, M – масса иона (массы всех ионов считаем одинаковыми).

В сумме сил, действующих на все n электронов, члены $e\mathbf{E}_s^{ee}$ выпадут, так как за счет электрон-электронных взаимодействий общий импульс системы электронов не может измениться. В этом легко убедиться, если просуммировать по s все члены

$$e\mathbf{E}_s^{ee} = \sum_{l \neq s}\frac{e^2(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_s|^3} \quad \text{от} \quad 1 \quad \text{до} \quad n.$$

Аналогично в сумме сил, действующих на n ионов, выпадут все члены $e\mathbf{E}_t^{ii}$.

Таким образом, сумма сил, действующих на электроны и ионы,

$$\sum_{s=1}^{n} m_0\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} + \sum_{t=1}^{n} M\frac{d\mathbf{V}_t}{dt} = 0. \qquad (17)$$

Видно, что сумма сил, действующих на электроны, равна и противоположна по знаку сумме сил, действующих на ионы. Это означает, что полный импульс системы электронов и ионов не изменяется со временем:

$$\sum_{s=1}^{n} m_0\mathbf{v}_s + \sum_{t=1}^{n} M\mathbf{V}_t = \text{const}.$$

Из (17) следует, что

$$m_0\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} - \sum_{t=1}^{n}\frac{d\mathbf{V}_t}{dt}\right) = -\sum_{t=1}^{n}(M + m_0)\frac{d\mathbf{V}_t}{dt}, \qquad (18)$$

где

$$\sum_{t=1}^{n}(M + m_0)\frac{d\mathbf{V}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \qquad (19)$$

есть изменение импульса проводника в целом из-за ускоренного движения электронов и ионов в нем. Плотность тока, который создается электронами, движущимися относительно ионов,

$$\mathbf{j} = -e\left(\sum_{s=1}^{n}\mathbf{v}_s - \sum_{t=1}^{n}\mathbf{V}_t\right). \qquad (20)$$

Из выражений (18) и (20) получаем искомое соотношение между изменением плотности тока и изменением импульса проводника

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{m_0}{e}\frac{d\mathbf{j}}{dt}. \qquad (21)$$

Приведенное рассмотрение опыта Барнетта показывает, что изменение импульса проводника $d\mathbf{P}/dt$ возникает лишь при протекании по нему переменного тока, то есть когда $d\mathbf{j}/dt \neq 0$.

Итак, измерив в опыте Барнетта изменения плотностей тока и импульса (плотностью импульса мы называем импульс, отнесенный к единице объема), можно согласно (21) определить отношение m_0/e. Что же касается электропроводности σ, то она, разумеется, зависит от эффективной массы электрона проводимости m, а не от m_0.

Как отмечалось выше, опыты Барнетта интерпретировались иногда (вслед за Ростокером [4]) некорректно. Хотя критика Ростокером заключения Брауна и Барнетта [3] об ошибочности выводов теории твердого тела в общем верна, конкретный анализ Ростокера опытов Барнетта вызывает возражения. Объяснение Ростокера сводится к тому, что поскольку плотность электронного тока $\mathbf{j} = -e\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{v}(\mathbf{k})$, а импульс совокупности электронов $\mathbf{P}' = m_0\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{v}(\mathbf{k})$, то

$$\frac{P'}{j} = -\frac{m_0}{e}. \qquad (22)$$

Но такое объяснение по существу не имеет отношения к опытам Барнетта, в которых измерялось изменение импульса проводника $d\mathbf{P}/dt$, то есть изменение импульса совокупности электронов и ионов, возникающее при изменении силы тока в проводнике, а не импульс $\mathbf{P}'$ одних только электронов (кстати, вообще неясно, как можно экспериментально определить $\mathbf{P}'$). Что же касается формулы (22), то она всего лишь выражает факт пропорциональности между импульсом совокупности электронов и плотностью электрического тока, который они переносят.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ответы на вопросы, поставленные в начале этих заметок, по существу уже были даны. Мы выяснили, что измеряемые в электронно-инерционных опытах величины (заряд Q, связанный с электрическим полем $\mathbf{E}_T$, и отношение dP/dt к dj/dt) зависят от отношения массы свободного электрона m_0 к его заряду $-e$. Динамика же электронов и дырок при наличии инерционных сил в условиях опытов Толмена описывается квазиклассическим уравнением движения

$$\hbar\frac{d\mathbf{k}}{dt} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}] + \mathbf{E}_T\right). \qquad (23)$$

Здесь $e > 0$ для дырок и $e < 0$ для электронов. Кинетические коэффициенты – магнитосопротивление, постоянная Холла, термо-эдс и др. – могут быть обычным образом найдены при помощи уравнения Больцмана, которое наряду с другими полями содержит и электрическое поле Толмена $\mathbf{E}_T$.

В приближении эффективной массы все кинетические характеристики электронов проводимости при наличии сил инерции, описываемых полем $\mathbf{E}_T$, выражаются через эффективную массу m, тогда как само поле $\mathbf{E}_T$ определяется массой свободного электрона m_0. Таким образом, мы убедились, что воздействие инерционных сил на проводник сводится к возникновению в нем стороннего поля $\mathbf{E}_T$, а кинетика электронов проводимости описывается при этом точно так же, как и в случае, когда проводник помещен во внешнее электрическое поле $\mathbf{E}$.

Положительное значение электронно-инерционных опытов можно видеть в том, что в тех условиях, когда не проявляются коллективные свойства электронов проводимости (их взаимодействия), могут быть непосредственно определены характеристики (масса и заряд) структурных единиц твердого тела – электронов. Это позволяет еще раз убедиться в правильности наших представлений о твердом теле.

Интерес к электронно-инерционным эффектам не угас до настоящего времени. Отметим лишь одну работу, опубликованную в 1997 году [7]. В этой статье сообщается об измерениях эффекта Холла в ускоренно движущемся полупроводнике, в качестве которого была избрана двумерная гетероструктура AlGaAs.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гинзбург В.Л.* Памяти А.А. Андронова. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 622 с.
2. *Цидильковский И.М.* // Успехи физ. наук. 1975. Т. 115. С. 321; Концепция эффективной массы. Екатеринбург: УрО РАН, 1999.
3. *Brown S., Barnett S.* // Phys. Rev. 1952. Vol. 87. P. 601.
4. *Rostoker N.* // Ibid. Vol. 88. P. 952.
5. *Shockley W.* // Ibid. P. 953.
6. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
7. *Кадушкин В.И.* // Физика и техника полупроводников. 1997. Т. 31. С. 468.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Электронные явления в полупроводниках чаще всего определяются электронами и дырками вблизи экстремальных точек зон, где энергию $\mathscr{E}$ как функцию волнового вектора $\mathbf{k}$ при малых $\mathbf{k}$ можно разложить в степенной ряд (если экстремум зоны не касается другой зоны, то есть если нет вырождения зон). Ограничившись членами порядка $\mathbf{k}^2$ и приняв во внимание, что в окрестности экстремума зоны разложение $\mathscr{E}(\mathbf{k})$ не содержит линейных по $\mathbf{k}$ членов (первые производные от $\mathscr{E}$ по $\mathbf{k}$ в экстремальных точках равны нулю), получаем для зависимости $\mathscr{E}(\mathbf{k})$ невырожденной зоны квадратичную форму:

$$\mathscr{E}(\mathbf{k}) = \mathscr{E}(0) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\left(\frac{\partial^2\mathscr{E}(\mathbf{k})}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\right)_{\mathbf{k}=0} k_\alpha k_\beta, \qquad \text{(I)}$$

где α и β принимают значения x, y, z (1, 2, 3), а точка экстремума выбрана при $\mathbf{k} = 0$. Девять величин $\partial^2\mathscr{E}(\mathbf{k})/\partial k_\alpha \partial k_\beta$ образуют симметричный тензор второго ранга[1].

Выражение (I) можно записать в форме, близкой к закону дисперсии для свободного электрона $\mathscr{E}(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2/(2m_0)$:

$$\mathscr{E}(\mathbf{k}) = \mathscr{E}(0) + \frac{\hbar^2}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{1}{m_{\alpha\beta}}k_\alpha k_\beta, \qquad \text{(III)}$$

где величины

$$\frac{1}{m_{k\beta}} = \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial^2\mathscr{E}(\mathbf{k})}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\right)_{\mathbf{k}=0} \qquad \text{(IV)}$$

[1] Тензор есть совокупность величин, преобразующихся при переходе к новой системе координат по определенному закону. Так, вектор, представляющий собой совокупность трех величин A_i ($i = 1, 2, 3$), которые при переходе к другой системе координат преобразуются по закону

$$A_i = \sum_j c_{ij} A_j,$$

можно назвать тензором 1-го ранга. Произведение $T_{ij} = A_i B_j$ составляющих двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ при переходе к новой координатной системе преобразуется по закону

$$T_{ij} = A_i B_j = \sum_k c_{ik} A_k \sum_\ell c_{j\ell} B_\ell = \sum_{k,\ell} c_{ik} c_{j\ell} T_{k\ell}, \qquad \text{(II)}$$

где $T_{k\ell} = A_k B_\ell$. Совокупность девяти величин T_{ij},

$$(T_{ij}) = \begin{matrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}, \end{matrix}$$

преобразуемых по закону (II), называется тензором 2-го ранга. Скаляр естественно назвать тензором нулевого ранга.

являются компонентами тензора обратной эффективной массы. Компоненты его зависят от выбора системы координат в $\mathbf{k}$-пространстве. Можно ее, в частности, выбрать так, чтобы компоненты $m_{\alpha\beta}^{-1} = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Такие оси координат называются главными, а компоненты тензора в этой системе координат – главными значениями тензора. Главные значения тензора (IV) составляют

$$\frac{1}{m_{\alpha\alpha}} = \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial^2\mathscr{E}(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}_\alpha^2}\right)_{\mathbf{k}=0}. \qquad \text{(V)}$$

Если тензор (IV) приведен к главным осям, то закон дисперсии (III) принимает более простую форму:

$$\mathscr{E}(\mathbf{k}) = \mathscr{E}(0) + \frac{\hbar^2}{2}\sum_{\alpha=1}^{3} m_{\alpha\alpha}^{-1} k_\alpha^2. \qquad \text{(VI)}$$

Второе слагаемое в (VI) имеет вид кинетической энергии электрона, обладающего различными массами в разных направлениях x, y, z. Величины $(1/m_{\alpha\alpha})^{-1}$, которые имеют размерность массы и обозначаются через $m_{\alpha\alpha}$, называются эффективными массами электрона.

Если закон дисперсии квадратичный изотропный,

$$\mathscr{E}(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \qquad \text{(VII)}$$

то тензор $(m_{\alpha\beta})^{-1}$ сводится к скаляру m^{-1}, где m есть скалярная эффективная масса. Вдали от экстремумов невырожденных зон и для вырожденных зон закон дисперсии имеет более сложный вид, чем (I).

Рецензент статьи Ю.В. Копаев

* * *

Исаак Михайлович Цидильковский, действительный член РАН, советник РАН. Область научных интересов – физика полупроводников. Автор более 250 научных работ и десяти монографий.