531
Э 52

Л. ЭЙЛЕР

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

ОНТИ — НКТП — СССР — 1938

Цена 5 р., переплет 1 р. 50 к.

КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

ФИЗИКА
МЕХАНИКА
МАТЕМАТИКА
АСТРОНОМИЯ

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
НКТП СССР

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

ПЕРВЫЕ ГЛАВЫ ИЗ
«МЕХАНИКИ»
И ИЗ
«ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ
ТВЕРДЫХ ТЕЛ»

ПЕРЕВОД С ЛАТИНСКОГО
В. С. ГОФМАНА и С. П. КОНДРАТЬЕВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
С ПРЕДИСЛОВИЕМ И ПРИМЕЧАНИЯМИ
В. П. ЕГОРШИНА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1938 ЛЕНИНГРАД

Редакция М. И. Филиппова. Оформление Е. Г. Шпак.
Переплет, титулы и шмуцтитулы художника В. Мартынюка.

Сдано в производство 7/IX 1937 г. Подписано к печ. 5/I 1938 г.
Формат $72 \times 105^{1}/_{32}$. Тираж 4 000 экз. Уч.-авт. листов 16,27. Печ.
листов $15^{5}/_{8}$. Печ. зн. в 1 печ. л. 45 600. Уч. № 4835. Изд. № 38.
Уполном. Главл. 28007. Заказ № 2688.

4-я тип. ОНТИ НКТП «Кр. Печати», Ленинград, Междунар., 75а.

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Рост производительных сил в эпоху мануфактур вызвал подъем технических и математических наук, в свою очередь, влияющих на уровень производства. В этой цепи бурного развития, которым отмечается XVII век, особенно нужно выделить возникновение нового метода в математике — исчисления бесконечно малых. Этот метод, связанный с именами Ньютона и Лейбница, был совершенно необходим для новой науки и прежде всего для механики. „Спрос" здесь породил „предложение". Основы нового исчисления были заложены уже во второй половине XVII в. Однако, подобно тому как возникновение нового анализа не было похоже на появление deus ex machina, точно так же и разработка его и дальнейшее развитие потребовали длинного исторического периода.

Один из творцов нового анализа, Исаак Ньютон, в своем основном произведении „Principia" пользуется им только в неявной форме. И лишь спустя пятьдесят лет появляется первое крупное произведение, в котором к механической науке, систематически изложенной, систематически применяется анализ. Это была „Механика“ Эйлера, вышедшая из печати в Петербурге в 1736 г.[1]). В показе того, как механические вопросы переводятся на математический язык, как решаются до конца получающиеся при этом уравнения, в развитии с этой целью самого анализа и заключается главная заслуга „Механики“ Эйлера. Если же учесть позднейшие работы Эйлера, то ему принадлежат крупнейшие заслуги в деле создания теории движения твердых тел, а также механики изменяемых тел.

I

Леонард Эйлер (Euler) родился в 1707 г. Отец его был кальвинистическим пастором в селе Риэн под Базелем. Среднее образование будущий математик получил сначала в семье, затем в Базеле. Там он стал посещать лекции по математике Иоганна Бернулли, который, узнав об исключительных способностях молодого Эйлера, стал с ним заниматься отдельно по первоисточникам.

Шестнадцати лет Эйлер после речи о философии Декарта и Ньютона получил степень „магистра искусств“ (magister artium). Отец заставил его изучать теологию и древнееврейский язык, но вскоре он согласился на то, чтобы его сын посвятил себя математике. В 1725 г. друзья Эйлера—Николай Бернулли и Даниил Бернулли, переехали в Петербург, где они были назначены академиками. Эйлер хотел последовать за ними, но вакансий для него не было. Тогда он решил изучать физиологию и медицину, для того чтобы занять открывавшуюся в Петербурге кафедру по этой дисциплине. В 1727 г. и он переехал

[1]) Полное заглавие: „Механика, т. е наука о движении, изложенная аналитическим методом“.

в Петербург, но здесь ему уже предложили работать по математике.

Вскоре Эйлер обратил на себя внимание математиков всего мира. Его статьи печатались в „Записках Петербургской академии наук". В 1736 г. он выпустил вышеуказанную „Механику" в двух больших томах.

В 1741 г. Эйлер по приглашению прусского короля Фридриха II перешел в Берлинскую академию наук, где он с 1744 по 1766 г. был директором математического отдела этой Академии. За это время он напечатал сотни статей в „Записках Берлинской академии", в „Записках Петербургской академии" и несколько томов отдельных изданий („Введение в анализ" „Диференциальное исчисление", „Морская наука", сочинение о вариационном исчислении, „Теория движения планет и комет", „Теория движения твердых тел" и др.).

В 1766 г. Эйлер снова переехал в Петербург, где в Академии ему предложили весьма выгодные условия. Здесь он пробыл до самой смерти (1783 г.). Будучи в это время уже слепым на оба глаза, он диктует сотни новых статей и около десяти громадных томов („Интегральное исчисление", „Новая теория движения Луны" и др.).

Всей своей жизнью Эйлер дает нам пример исключительной продуктивности и широкого размаха научного творчества.

II

„Механика" Эйлера, изданная в 1736 г., представляет собой динамику точки. До Эйлера под словом „механика" обычно понимали собственно „учение о машинах" — статику. В отличие от этой традиции Эйлер под механикой подразумевает „науку о движении", а не о равновесии.

Иоганн Бернулли отнесся критически к такому словоупотреблению своего ученика. В письме к нему от 6 ноября 1737 г. он писал, что для науки о движении более подходит название „динамика“, введенное Лейбницем. „Механика“ же подходит только к случаям равновесия. Она является наукой о „мертвых силах“, динамика же — наукой о „живых силах“ [1]).

В начале предисловия к своей „Механике“ Эйлер за наукой о равновесии удерживает название „статика“, а механикой называет науку о движении. В качестве своих предшественников в области динамики („механики“ по Эйлеру) он указывает Германа, выпустившего в 1716 г. свою „Форономию“, и Ньютона с его „Principia“ (1686 г.).

Недостаток этих работ Эйлер видит в том, что они не применяют анализа, а пользуются лишь „синтетически геометрическими доказательствами“. Между тем, говорит Эйлер, только благодаря анализу „можно достигнуть полного понимания“ механики. В самом деле, говорит он, при геометрическом методе, „если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он (читатель) едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно“ [2]).

В том же предисловии Эйлер намечает план всей механики: выпуская в 1736 г. два тома, он посвятил их целиком механике точки, последующие же тома он думал посвятить механике твердых тел.

Эйлер отчетливо выделяет механику точки из всей системы механики, считая, что нужно начинать именно с нее. „Изложение вопроса о движении точек, — го-

[1]) См. „Der Briefwechsel zwischen Leonard Euler und Johann I Bernoulli“, Bibliotheca mathematica, III. Folge, 5, B., S. 263.

[2]) См. стр. 33—34 настоящего издания.

ворит он,—есть основа и главная часть всей механики, на которой основываются все остальные части“[1]). При этом „точку“ Эйлер не отличает от маленькой „частицы“ тела.

III

Наметим вкратце содержание „Механики“ Эйлера. Как мы уже говорили, оба ее тома посвящены механике точки. Первый том содержит теорию движения свободной точки и состоит из шести глав.

Первая глава содержит кинематическое введение „О движении вообще“ и о законе инерции. Вторая глава, носящая заглавие „О действии сил на свободную точку“, содержит принципы механики. Эйлер важнейшим принципом считает математическую связь между величиной силы, массы и приращением скорости за элемент времени dt.

Другими словами, здесь речь идет о втором законе Ньютона.

Третья глава „О прямолинейном движении свободной точки под действием абсолютных сил“ говорит о прямолинейном движении в пустоте. Здесь Эйлер показывает все значение нового анализа для решения механических задач. Эти задачи здесь приводятся к задаче интегрирования диференциальных уравнений второго порядка. Эйлер широко пользуется первым интегралом, который теперь носит название „интеграла живых сил“. Здесь приводится много задач, представлявших в то время немалые математические трудности. И мы отчетливо видим, что чисто математические вопросы не менее, а порой даже более, интересовали Эйлера, чем проблемы механические.

[1]) См. стр. 35 настоящего издания.

Четвертая глава, которая уже наряду с последующими главами не входит в настоящее издание, говорит „О прямолинейном движении точки в сопротивляющейся среде“. Вся эта глава еще более представляет чисто математический интерес.

Последние две главы первого тома говорят о криволинейном движении точки в пустоте и сопротивляющейся среде. При этом Эйлер еще не пользуется прямоугольными осями координат, а разлагает силу на тангенциальную и нормальную составляющие и составляет так называемые „естественные уравнения движения“.

В этих главах, по сути дела, содержатся введение в небесную механику и введение в баллистику, которой позднее Эйлер специально занимался в связи с переработкой сочинения Робинса „Артиллерия“.

Второй том „Механики“ посвящен несвободному движению точки. Главы его — „О несвободном движении вообще“, „О движении точки по данной линии в пустоте“, „О движении точки в сопротивляющейся среде“ и „О движении точки по данной поверхности“.

Этот том представляет главным образом математический интерес как собрание задач на интегрирование диференциальных уравнений, на вариационное исчисление (тогда еще не существовавшее) и т. д. В последней главе закладываются основы теории поверхностей.

В настоящем издании приводятся первые три главы первого тома, в которых излагаются основы динамики точки.

„Теорию движения твердых тел“ отделяют от двух томов „Механики“ почти тридцать лет. За этот промежуток времени английский математик Маклорен

(1698—1746) предложил проектировать движения на неизменные три взаимно перпендикулярные оси [1]).

Эйлер по достоинству оценил этот новый прием и в своем новом сочинении широко им пользуется. Помимо этого, он вообще счел необходимым заново изложить основы механики точки, посвящая им солидное введение из шести глав. Мы приводим в настоящем издании пять глав из этого введения. Сравнение этого введения с первым томом „Механики" показывает нам эволюцию во взглядах Эйлера на принципы механики.

Давая впервые на русском языке эти основы механики точки Эйлера, мы ни в коей степени не сомневаемся в крайней желательности полного перевода произведений Эйлера, посвященных механике. Но это дело, вероятно, потребует немалого времени. Пока же нам кажется также несомненным, что и настоящее издание принесет свою пользу, удовлетворяя большой интерес к истории развития механики.

IV

Рассмотрим вкратце некоторые основные понятия механики, как они трактуются Эйлером.

Начнем с понятий пространства и времени. В „Теории движения твердых тел" он возражает философам, отрицающим реальность места, и утверждает, что „место не является только чистым понятием нашего ума" [2]).

Пространство Эйлер считает так же реальным, как и время.

[1]) Maclaurin, A complete system of fluxions, Edinbourgh, 1742.

[2]) „Теория движения твердых тел", § 128.

Деление времени на равные части основывается, замечает Эйлер, на некотором объективном основании. Если бы это было иначе, „если бы вне нашего сознания не существовало никаких средств для измерения времени, то нам ничто не помешало бы при всяком движении считать равными те части времени, в течение которых проходятся равные пути. Следовательно, мы могли бы с одинаковым основанием рассматривать любое движение как равномерное. Однако сама природа вещей достаточно убедительно свидетельствует, что равномерное движение существенно отличается от неравномерного; следовательно, равенство промежутков времени, на котором это основывается, представляет собой нечто большее, чем содержание наших понятий. В силу этого следует притти к выводу, что равенство времен имеет под собой определенное основание, находящееся вне нашего сознания“ [1]).

Эйлер признавал и относительное пространство, т. е. пространство, связанное с телами, и абсолютное пространство. Необходимость последнего Эйлер защищает, исходя из бесспорно материалистических положений.

Ход его рассуждений таков. Если бы мы отрицали абсолютное пространство, то вынуждены были бы отбросить абсолютный покой и абсолютное движение, а вместе с этим пришлось бы отбросить и законы движения, которые покоятся на абсолютном пространстве, т. е. законы Ньютона. Придется тогда „допустить, что вообще не может быть никаких законов движения“, так как мы не могли бы ничего сказать о том, что происходит в изолированном теле, а следовательно, и о том, какое влияние оказывают одни

[1]) „Теория движения твердых тел“, § 29.

тела на другие. „Пришлось бы утверждать, что все происходит случайно и без всякой причины" [1]).

Отрицание абсолютного пространства, по мнению Эйлера, привело бы к отрицанию закономерности в природе.

В то же время Эйлер отчетливо сознает все трудности, связанные с понятием абсолютного пространства и времени. В пояснении первом к определению второму в „Теории движения твердых тел" Эйлер пишет: „Здесь, на пороге механики, нам не следует беспокоиться по поводу абсолютного покоя, о котором мы вообще не знаем, существует ли он и в каком именно виде; ведь мы в механике будем подвергать исследованию лишь то, что мы постигаем с помощью наших чувств" [2]). А в пояснении втором он пишет еще яснее: „Изложенное здесь понятие покоя должно быть отнесено к категории отношений, так как оно основывается не на положении одной только точки *O*, которой мы приписывали состояние покоя, но оно устанавливается на основании сопоставления точки *O* с каким-либо другим внешним телом *A*" [3]).

Раз покой является понятием относительным, то и движение может быть определено только относительно какого-то тела [4]).

Эйлер идет дальше. Он подчеркивает, что „движение и покой противоположны друг другу лишь по названию, но не по существу дела... Движение отличается от покоя не в большей мере, чем одно движение от другого" [5]).

[1]) Там же, § 81.
[2]) Там же, § 9.
[3]) Там же, § 10.
[4]) Там же, § 14.
[5]) Там же, § 15.

Эйлер считает несостоятельными те мнения философов, согласно которым движение и покой „существенно“ отличаются друг от друга. „Правда, — говорит он, — философы возразят, что условия коренным образом изменяются (т. е. движение будет резко отличаться от покоя, *В. Е.*), когда речь идет об абсолютном движении и покое, но что представляет собой абсолютное движение и покой, этого они удовлетворительно определить не могут“ [1]).

Высказывая здесь стихийно диалектические положения об относительности движения, Эйлер дополняет их столь же диалектическими указаниями о том, что движение нельзя считать только относительным. Движение и покой — это, по Эйлеру, не „чисто умозрительное отношение“. Наоборот, в самих телах содержится нечто такое, что соответствует нашим понятиям покоя и движения [2]).

Эйлер не сумел найти удовлетворительного решения вопроса об абсолютности движения и покоя; в конце концов он принимает ньютоновские воззрения на эту проблему. А если согласиться с тем, что покой и движение абсолютны в ньютоновском смысле, то различить их мы сможем только тогда, когда мы допустим абсолютное пространство.

Таким образом у Эйлера указанное противоречие осталось неразрешенным.

V

Борьба между картезианцами и ньютонианцами при Эйлере была близка к завершению и закончилась победой Ньютона. Картезианцы строили механику физически конкретную, ясную, — зато в ней преоб-

[1]) Там же, § 17.
[2]) Там же, § 79

лидала наивность или даже грубое упрощенчество. В ньютонианской физике было немало математического формализма или даже иногда мистики,— зато она имела очевидные преимущества: она позволяла математически легко справляться с такими задачами, которые картезианцев ставили втупик. Не подлежит сомнению, что указанный „формализм" Ньютона был лишь своеобразной формой отражения объективных закономерностей движения, где форма, так сказать, опережала осознание того физического содержания, которое заключалось в понятиях. Вычислительная механика получила от Ньютона весьма сильное оружие, в особенности для целей астрономии.

Эйлер сознавал слабые стороны ньютонианской физики, и потому он никогда не был последовательным ньютонианцем. Но он также сознавал и преимущества ньютоновского метода. Разрешить до конца противоречия между ньютонианством и картезианством ему не удалось.

Декарт признавал сохранение движения одним из основных законов природы. Ньютон это отвергал, хотя в его „Principia" и была теорема, близкая к теореме живых сил.

У Эйлера мы находим чрезвычайно детальную азработку этой теоремы и ее применений к вычислениям,— зато у него нет физической трактовки соответствующего закона, как это мы видим у Лейбница и у Бернулли.

Из уравнений движения Ньютона легко получается указанная теорема, но в ту эпоху в ней трудно было узнать теорему о живых силах с определенным физическим смыслом. Этому мешало отсутствие сведений о понятии работы, о связи его с живой силой, не говоря уже о том, что непонятен был множитель $\frac{1}{2}$, который фигурировал в этой теореме и который отсутствовал в лейбницевском определении живой силы.

Указанная теорема формулируется Эйлером в „Механике" в следствии первом к предложению девятнадцатому. В этом следствии мы читаем: „Приращение квадрата скорости будет пропорционально произведению силы на пройденный элемент пути" [1]. А в следствии третьем к предложению двадцатому выводится, что „приращение квадрата скорости пропорционально произведению силы на пройденный отрезочек пути, деленному на массу или силу инерции тельца" [2].

Другими словами, теорема эта выражается следующим уравнением:

$$c\,dc = \frac{np\,ds}{A},$$

где c — скорость, p — сила, s — путь, A — масса точки, n — коэфициент пропорциональности.

Предложение тридцать первое содержит задачу на определение скорости тела, брошенного вверх с данной скоростью и находящегося под действием постоянной силы, направленной вниз. Здесь Эйлер всего ближе подходит к сути дела. Показывая, что „движение тела поднимающегося совпадает с движением тела падающего" и что скорости зависят только от расстояния от высшей точки [3]), Эйлер в примечании пишет: „Это сходство подъемов и падений с полной очевидностью можно доказать a priori, исходя из действия самих сил. Так как при

[1]) „Механика" § 151.
[2]) Там же, § 157.
[3]) Там же, § 248.

подъеме сила отнимает от скорости столько, сколько при падении к ней прибавляет, то ясно, что между обоими движениями должно быть полное сходство и не должно быть никакого различия, кроме как в направленности времени"[1]).

Так как квадрат скорости пропорционален высоте, то Эйлер вводит в расчет особое понятие „высоты скорости", или „высоты, соответствующей данной скорости"[2]). Пользуясь этим понятием, он вместо уравнения

$$c\,dc = np\,ds$$

пишет более простое уравнение

$$dv = np\,ds,$$

где p — высота, соответствующая скорости c.

Такого рода особое наименование для квадрата скорости, с одной стороны, приближало Эйлера к надлежащему понятию живой силы, а с другой стороны, оно и отдаляло его от принятых Лейбницем, а следовательно, уже освященных традицией обозначений и связанного с ними физического содержания.

В ряде задач (предложения 42, 43, 44, 45) Эйлер определяет силу из уравнения живых сил. В указанных обозначениях он получает, что

$$\frac{p}{A} = \frac{dv}{ds}.$$

Во втором своем сочинении „Теория движения твердых тел" Эйлер пользуется в общем тем же методом, хотя обозначения уже здесь другие. Останавливаться на этом мы не будем.

[1]) Там же § 251.
[2]) Там же, § 200 и 201.

VI

В качестве основных принципов механики Эйлер признает первый и второй законы Ньютона.

Принцип инерции Эйлер старается доказать, опираясь на логический закон достаточного основания [1]). Тело, покоящееся в абсолютном пространстве, не будет приходить без внешнего побуждения в движение, по мнению Эйлера, потому, что нет основания для того, чтобы оно начало двигаться в одном направлении, а не в другом. Но в то же время Эйлер сознает, что реальная причина не может лежать в чисто логическом принципе. Он говорит, что причина инерции заложена в самой природе. То обстоятельство, что Эйлер не желает ограничиться чисто логическим обоснованием такого типа, а привлекает сюда реальную действительность, должно быть по достоинству оценено историей.

Второй закон Ньютона Эйлер стремится доказать, ссылаясь на то, что тело, находящееся под действием силы, за время dt проходит некий добавочный элемент пути сверх того, который оно проходит в силу инерции. Этот добавочный элемент, говорит Эйлер, должен быть пропорционален действующей силе [2]). В этом якобы доказанном принципе Эйлер видит основу всей механики. Его он возводит в ранг необходимых законов, т. е. законов, единственно возможных, законов, достоверных математически, а не физически, достоверных логически, а не эмпирически.

Что касается третьего закона Ньютона, то он явно Эйлером не приводится.

[1]) „Механика", § 56 и 63. Ср. также „Теорию движения твердых тел", § 82 и 85.

[2]) „Механика", § 150.

Понятие силы в ньютоновском смысле передается Эйлером двумя терминами: лейбницевским „potentia“ [1]) и ньютоновским „vis“, причем первый употребляется в „Механике“, а второй — в „Теории движения твердых тел“.

В „Механике“ Эйлер некоторое время (до § 77) вовсе не употребляет термина „сила“, заменяя его словами „внешняя причина“. О сущности силы он говорит в „Механике“ в одном из примечаний к определению силы. Силу (potentia) он определяет как усилие (vis), которое переводит тело из состояния покоя в состояние движения или видоизменяет его движение. А в упомянутом примечании (§ 102) мы читаем: „Имеют ли подобного рода силы (potentiae) свое происхождение в самих телах или же они существуют в природе сами по себе, — этого здесь я не определяю. Достаточно здесь установить, что силы (potentiae) действительно существуют в природе, что доказывает хотя бы одна сила тяжести (vis gravitatis), вследствие которой все тела на земле стремятся упасть вниз“. Кроме того, Эйлер указывает на силы (vires), действующие на планеты и заставляющие их отклоняться от равномерного и прямолинейного движения. Упоминаются также и магнитные и электрические силы. Какова же причина этих сил? При тогдашнем уровне физики этот вопрос был едва ли разрешим. Эйлер по этому поводу пишет: „Иные думают, что все эти силы происходят от движения некоей тонкой материи, другие же приписывают самим телам эту силу (vim) притяжения и отталкивания“. Первые — это картезианцы, вторые — ньютонианцы. Между теми и другими происходила ожесто-

[1]) У Лейбница potentia означает не силу, а энергию.

ченная полемика[1]. Какова же позиция самого Эйлера? Он определенно склоняется на сторону первых. Он пишет: „Мы с достаточной ясностью видим, что подобного рода силы (potentias) могут получить свое начало из упругих тел и из вихрей“.

В „Теории движения твердых тел“ мы находим еще более четкую постановку вопроса о природе сил. Эйлер затрагивает там (§ 137) вопрос, не могут ли духи (spiritus) или божественная воля создать эти силы.

Отвечает на этот вопрос он следующим образом. „Прежде всего, — говорит он, — в задачи механики не входит решать, могут ли духи влиять на тела и изменять их состояние. Правда, в самих телах мы не находим ничего такого, что бы указывало на невозможность действия духов. Однако воздействие на тела не представляется столь тяжелым делом, чтобы его следовало приписать только всемогуществу божественной воли, так как его приходится присвоить самым обычным телам“.

Эйлер возражает против возможности действия на расстоянии. Происхождение силы Эйлер ищет в механических процессах. И здесь исключительное значение отводится непроницаемости. Эйлер рисует любопытную схему: одно тело движется и ударяется о неподвижное тело. Оба тела стремятся сохранить свое состояние. И именно в силу этого стремления, при наличии непроницаемости, меняется состояние обоих тел. Так, „способность отдельных тел к сохранению своего состояния порождает силы, вследствие которых изменяется состояние других тел“ [2]. Эйлер

[1]) Точка зрения ньютонианцев (отличная несколько от точки зрения самого Ньютона) изложена в предисловии Котса к „Principia“ Ньютона.

[2]) „Теория движения твердых тел“, § 121.

таким образом приближается к тому, чтобы силу интерпретировать как перенос движения (правда, в пределах одной механики).

Специально о сущности тяготения Эйлер говорит, отрицая возможность действия на расстоянии. Если мы признаем, говорит Эйлер, действие на расстоянии, то это значило бы, что „тела направляются вниз как бы каким-то духом".

„Представим себе, — говорит он далее, — что два тела A и B находятся на большом расстоянии друг от друга и что в промежутке между ними совершенно нет никакой материи, и пусть вблизи тела A не существует ничего такого, что относилось бы к B; тогда в первом теле ничего не изменилось бы, если бы второе тело совершенно исчезло. Из этого следует, что подобного рода испускание сил противоречит здравому смыслу" [1]).

В противовес действию на расстоянии Эйлер принимал, что „сила тяжести происходит вследствие действия некоторой тонкой материи, ускользающей от наших чувств".

В „Письмах к немецкой принцессе" Эйлер писал: „Старые философы довольствовались объяснениями природных явлений посредством разного рода качеств, называемых ими оккультными. Например, говорилось, что опиум усыпляет вследствие оккультного качества, делающего его способным вызывать сонливость; это значило — совсем ничего не сказать или, более того, за этим можно было скрыть наше незнание. Тяготение нужно рассматривать тоже как оккультное качество, поскольку его выдают за существенное свойство тел. И поскольку в настоящее время стараются из философии изгнать все оккультные качества,

[1]) Там же, § 184.

постольку и тяготение в указанном смысле подлежит изгнанию" [1]).

Отвергая возможность действия на расстоянии, Эйлер тем самым стоял на материалистических позициях.

Разумеется, Эйлер не отвергал открытой Ньютоном зависимости величины силы притяжения (силы тяжести) от расстояния, но он отвергал попытки ньютонианцев свести эту силу к оккультному качеству.

Эйлер по-своему пытался синтезировать картезианские физические идеи с ньютонианскими формальными идеями, принесшими громадные победы механической науке.

VII

Стремление синтезировать ньютонианство с картезианством находит свое проявление в том, что Эйлер то и дело возвращается к обсуждению принципиальных методологических вопросов (особенно в „Примечаниях"), к полемике с неугодными ему философами.

Говоря о понятии движения, Эйлер спорит с философами, отрицающими движение [2]). Говоря о непроницаемости как о сущности тел, Эйлер не забывает отвергнуть мнение тех философов, которые говорят о непознаваемости сущности вещей [3]). Говоря о причинах движения, Эйлер особенно подчеркивает детерминизм в механических явлениях [4]). Не гну-

[1]) L. Euler, Lettres à une Princesse d'Allemagne, t. I, Petersbourg 1768, p. 268, 269.

[2]) „Теория движения твердых тел", § 23.

[3]) Там же, § 129.

[4]) Там же, § 76.

шается Эйлер и указаний на противоречивый характер движения [1]).

Вводя те или иные абстракции в механику, Эйлер отдает себе ясный отчет в производимой им операции, толкуя ее сплошь и рядом явно материалистически. В „Письмах к принцессе“ он писал: „Душа имеет способность, которую мы называем абстракцией. Это значит, душа фиксирует свое внимание только на одном количестве или качестве объекта: количество или качество она отделяет от него и рассматривает их как бы не связанными с объектом. Например, когда я дотрагиваюсь до горячего камня и фиксирую мое внимание на одной теплоте, я отсюда образую идею теплоты, не связанную больше с камнем. Эта идея теплоты образуется при помощи абстракции. Ясно, что эта идея могла бы быть образована из соприкосновения с горячим деревом или из погружения руки в горячую воду. Таким же образом при помощи абстракции душа образует тысячи других идей количеств и свойств тех или иных предметов, отделяя их потом от самих объектов. . . Эти идеи, приобретенные нами при помощи абстракции, называются понятиями в отличие от идей чувственных, отображающих вещи, реально существующие“ [2]).

Без абстракций, по словам Эйлера, нет „путей к познанию истины“ [3]). Но он не смешивает абстракций с породившей их реальностью, что наблюдается у формалистов идеалистического толка [4]). Разлагая

[1]) Там же, § 46.

[2]) „Lettres“, t. 2, p. 87.

[3]) „Теория движения твердых тел“, § 77.

[4]) Разбирая движение тельца в канале, он говорит: „Я *мысленно* отвлекусь от трения“ („Теория движения“, § 210), а не исследует мысленную конструкцию движения без трения.

движение по трем осям координат, Эйлер говорит об этом разложении как о чисто геометрической операции, ничего не изменяющей в самом движении [1]).

Скорость Эйлер определяет как отношение пути к промежутку времени (при равномерном движении), но, раньше чем дать такое определение, он в „Примечании" дает конкретное разъяснение, что значит двигаться одинаково быстро, быстрее или медленнее [2]).

Из определения Эйлера следует, что для вычисления скорости надо путь делить на время:

$$v = \frac{s}{t}.$$

До Эйлера такие деления не производили. Это равенство заменяли рядом пропорций:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2},$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1},$$

$$v_1 : v_2 = \frac{s_1}{s_2} : \frac{t_1}{t_2}$$

и т. д. Это объяснялось тем, что считали возможным делить друг на друга только или отвлеченные или же одноименные числа. Для того чтобы написать формулу

$$v = \frac{s}{t},$$

нужно было перейти к более высокому классу абстракции и обосновать эту новую абстракцию.

1) „Теория движения твердых тел", § 52.
2) Там же, § 30.

Этот шаг вперед и делает Эйлер в особых „Пояснениях“ к указанным формулам [1]).

Эйлеру принадлежит заслуга систематической разработки абстрактного понятия материальной точки и теории ее движения. Это понятие возникло как предельное — из понятия частицы тела или небольшого тела, „тельца“, корпускулы.

Механике точки Эйлер посвятил целых два тома. Но, образуя абстракцию материальной точки, Эйлер не может забыть, откуда эта абстракция произошла. То и дело он напоминает, что точку можно заменить малым телом или „тельцем“, показывая тем самым те или иные отступления от формальной строгости.

Во всех этих случаях у Эйлера сказывается стихийный материализм естествоиспытателя. Тем не менее его стихийный и наивный материализм не мог не сочетаться с математическим формализом и рационализмом в теории познания. Сплошь да рядом у него „механика“ является лишь поводом для математических исследований, как он и сам об этом говорит в Предисловии к „Механике“.

Решая ту или иную задачу с механическими терминами в общем виде, Эйлер нередко приходит к абсурду, к „немыслимому“, „непонятному“ решению.

Мы вовсе не хотим сказать, что материалисту не следует заниматься подобными абстрактными вопросами; необходимо лишь подчеркнуть, что подобные вопросы представляют для непоследовательного материалиста и недиалектика непреодолимую трудность с точки зрения теории познания. Сочетать материализм с применением высоких абстракций можно только на основе материалистической диалектики.

[1]) Там же, § 35 и 36.

Очевидный рационализм сказывается у Эйлера в его утверждении, что определения устанавливаются „в зависимости от нашего свободного выбора“ [1]). Дань рационализму видна также в самой структуре механических сочинений. Сухая рационалистическая система „предложений“ (Propositio), „следствий“ (Corollarium), „определений“ (Definitio), „основных положений“ (Hypothesis), „аксиом“ и т. д., заимствованная у Евклида, прерывается у Эйлера лишь глубокими по мысли „Примечаниями“ и в „Теории движения“, кроме того, „Пояснениями“.

VIII

В переводе сочинений Эйлера мы стремились с максимальной точностью передать понятия, употреблявшиеся автором. Если те или иные понятия у Эйлера не совпадают с нынешними понятиями, отличаясь изрядной наивностью, непосредственностью, то в этих случаях мы особенно строго следили за понятиями автора, а не заменяли их новыми понятиями, хотя и выросшими, может быть, из первых.

Так, мы считали, что если Эйлер неразборчиво относится к терминам „бесконечно малый“ и „очень малый“, то переводчик обязан передать соответствующие обозначения, в точности следуя оригиналу, а не современной логике [2]).

Математические обозначения автора, там где они расходятся с современными, мы заменяли общепринятыми, если это не противоречит методу автора. Однако необходимо здесь оговорить особенности

1) „Теория движения твердых тел“, § 144.

2) Нелишне отметить, что немецкий перевод „Механики“ Эйлера, сделанный Вольферсом, очень часто является переложением и пересказом, а не переводом.

эйлеровской символики. Так, вторая степень от a обозначается им, как правило, в виде aa (хотя изредка и в виде a^2). Зато степень от диференциала изображается при помощи показателя (например dx^2).

Квадрат производной

$$\frac{ds}{dt}$$

обозначается в виде

$$\frac{ds^2}{dt^2}.$$

Знак радикала имеет вид

$$\surd, \text{ а не } \sqrt{}.$$

Второй диференциал d^2x у Эйлера обозначается в виде ddx.

Наконец, весьма отличное обозначение мы находим у него для тригонометрических функций: $\sin\varphi$ у Эйлера обозначается в виде

$$\int\varphi \text{ или } \int i\varphi$$

$$\cos\varphi \text{ в виде } co\int\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\varphi \text{ в виде } \operatorname{tang}\varphi,$$

$$\ln N \text{ в виде } lN.$$

Кроме того, мы считали необходимым еще в одном отступить от оригинала: мы делали меньшие абзацы и, кроме того, формулы и уравнения мы выделяли в отдельную строку. Не внося этим ничего принципиально нового, мы сильно облегчили труд чтения Эйлера.

В конце книги помещены примечания автора этих строк.

Перевод „Теории движения твердых тел“ сделан В. С. Гохманом. Первоначальный текст перевода „Механики“ принадлежит С. П. Кондратьеву.

В. Егоршин.

MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSÓRE.

TOMVS I.

INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.

PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

Л. ЭЙЛЕР

МЕХАНИКА,

Т. Е. НАУКА О ДВИЖЕНИИ,
ИЗЛОЖЕННАЯ
АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ [1]

ПРЕДИСЛОВИЕ

Термин „механика“ задолго до нашего времени получил двоякое значение, и даже теперь этим именем называются две науки, совершенно различные между собой как по своим принципам, так и по предмету своего исследования. Имя „механика“ обычно прилагается как к той науке, которая трактует о равновесии сил [2] и их взаимном сравнении, так и к той, в которой исследуется сама природа движения, его происхождение и изменение. Хотя и в этой последней дисциплине главным образом рассматриваются также силы, так как ими производится и изменяется движение, однако метод трактовки этого вопроса сильно отличается от первой науки. Поэтому для избежания всякого недоразумения лучше будет ту науку, в которой дело идет о равновесии сил и их сравнении, называть статикой, другой же науке — науке о движении — придать имя механики; ведь в таком смысле эти термины обычно употреблялись повсюду и раньше.

Кроме того, между этими дисциплинами лежит огромное различие во времени. Если статику стали разрабатывать еще до Архимеда, то первые основы механики положены только Галилеем, его исследованиями о падении тяжелых тел.

В последнее время, после открытия анализа бесконечно малых, обе эти науки настолько обогатились, что все то, что раньше за столь долгий промежуток времени было добыто с таким трудом, можно сказать, почти исчезло сравнительно с этим новым материалом. Однако все эти столь многочисленные открытия, которыми эти науки к нашему времени так сильно обогатились и так далеко продвинулись вперед, рассеяны в столь многочисленных журналах и отдельных работах, что для человека, занимающегося этими вопросами, является делом крайне трудным все это найти и пересмотреть. Кроме того, — что создает особенные затруднения, — некоторые из них предложены без всякого анализа и доказательств, другие подкреплены доказательствами, чрезмерно запутанными и составленными по образцу древних, иные, наконец, выведены из чуждых и менее естественных принципов, так что понять и объяснить их можно только ценой величайшего труда и огромной потери времени.

Что касается статики, то почти полную и во всех отношениях прекрасную работу издал на французском языке Вариньон в двух солидных томах [3]. Хотя эта работа носит заглавие „Механика", однако она вся занята определением равновесия сил, приложенных к разного рода телам; в ней почти ничего нет, что касалось бы движения и той науки, которую здесь мы обозначили именем механики. Точно так же известный ученый Вольф в своих „Началах наук" [4], особенно в новейшем их издании, дал много блестящих страниц в „Элементах механики", касающихся как статики, так и механики; но он соединил их вместе и не делал никакого различия между этими двумя науками. Намеченные границы и самый характер произведения, повидимому, не позволили ему разграничить эти науки между собой и, с другой стороны, достаточно полно изложить каждую из них. Я не знаю, вышла ли в свет какая-либо другая работа, кроме „Форономии“ Германа [5], в которой это учение о движении было бы разобрано совершенно отдельно и обогащено столь многими блестящими вновь открытыми положениями. Герман и сам внес в эту науку много нового; вместе с тем он прибавил и собрал здесь все то, что за это время было открыто стараниями других ученых. Но так как он хотел охватить в этом не очень большом труде, кроме механики, еще и другие смежные науки, а именно статику и гидростатику вместе с гидравликой, то ему оставалось очень мало места для изложения механики; вследствие этого все то, что касается этой науки, он принужден был изложить в краткой и отрывистой форме. Кроме того,—что особенно мешает читателю,—все это он провел по обычаю древних при помощи синтетически геометрических доказательств и не применил анализа, благодаря которому только и можно достигнуть полного понимания этих вещей. Приблизительно таким же образом написана работа Ньютона „Математические принципы философии“, благодаря которой наука о движении получила наибольшее развитие.

Однако если анализ где-либо и необходим, так это особенно относится к механике. Хотя читатель и убеждается в истине выставленных предложений, но он не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что, если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно, если не прибегнет сам к анализу и те же предложения не разрешит аналитическим методом. Это как раз случилось со мной, когда я начал знакомиться с „Принципами“ Ньютона и „Форономией“ Германа; хотя мне казалось, что я достаточно ясно понял решение многих задач, однако задач, чуть отступающих от них, я уже решить не мог. И вот тогда-то, я попытался, насколько умел, выделить анализ из этого синтетического метода и те же предложения для собственной пользы проработать аналитически; благодаря этому я значительно лучше понял суть вопроса. Затем таким же образом я исследовал и другие работы, относящиеся к этой науке, разбросанные по многим местам, и лично для себя я изложил их планомерным и однообразным методом и привел их в удобный порядок. При этих занятиях я не только встретился с целым рядом вопросов, ранее совершенно незатронутых, которые я удачно разрешил, но я нашел много новых методов, благодаря которым не только механика, но и самый анализ, повидимому, в значительной степени обогатился. Таким образом и возникло это сочинение о движении, в котором я изложил аналитическим методом и в удобном порядке как то, что я нашел у других в их работах о движении тел, так и то, что я получил в результате своих размышлений.

В основу разделения этого труда я положил как различие тел, которые движутся, так и их состояние — свободное или несвободное. Самый характер тел дал мне это разделение, так что сначала я стал исследовать движение тел бесконечно малых и как бы точек, а затем я перешел к телам конечной величины, — и при этом или к твердым, или к гибким, или состоящим из частей, которые совершенно расходятся друг от друга.

Подобно тому как в геометрии, в которой излагается измерение тел, изложение обыкновенно начинается с точки, точно так же и движение тел конечной величины не может быть объяснено, пока не будет тщательно исследовано движение точек, из которых, как мы принимаем, составлены тела. Ведь нельзя наблюдать и определить движения тела, имеющего конечную величину, не определив сначала, какое движение имеет каждая его маленькая частичка или точка. Вследствие этого изложение вопроса о движении точек есть основа и главная часть всей механики, на которой основываются все остальные части. Для исследования вопроса о движении точек я предназначил эти два первых тома; в первом я рассмотрел свободные точки, во втором — несвободные. Но то, что я изложил в этих книгах, часто идет дальше, чем исследование об одних точках, и из него зачастую можно определить движение конечных тел, — разумеется, не всякое, а то, благодаря которому отдельные части движутся совместно. Ведь из того положения, что брошенная в пустоте, точка описывает параболу, можно также сделать вывод, что всякое конечное тело, если оно будет брошено, должно двигаться по параболе; однако отсюда еще не следует закона о движении отдельных частей, и этот последний вопрос будет специально разобран в следующих книгах, в которых определяется движение конечных тел. Равным образом то, что Ньютон доказал относительно движения тел, побуждаемых центростремительными силами, имеет значение только для точек, а между тем он правильно применил эти предложения также и к движению планет.

Итак, в этом первом томе я подвергаю исследованию свободные точки и наблюдаю, какое изменение движения вызывают в них любые движущие их силы; свободным же, с моей точки зрения, тело является тогда, если ему ничто не мешает, чтобы оно двигалось с той скоростью и в том направлении, которые оно должно иметь как вследствие присущего ему движения, так и вследствие движущих его сил. Так, говорят, что планеты и тела на земле, падающие или брошенные вверх, движутся свободно, так как при этом движении они следуют как врожденной силе [6], так и действию движущих сил; напротив, тело, падающее по наклонной плоскости, или качающийся маятник, движется несвободно, так как находящаяся внизу плоскость или нить маятника, прикрепленная другим концом, препятствует телу падать прямо, как этого требует сила тяжести.

В первой главе я излагаю основные свойства движения и то, что обычно говорят о скорости, о пути и о времени. Затем я указываю всеобщие законы природы, которым следует свободное тело, не подверженное действию сил. Тело подобного рода, раз оно находится в состоянии покоя, должно вечно пребывать в покое; если же оно имело движение, оно вечно должно двигаться с той же скоростью по прямому направлению. Оба эти закона наиболее удобно можно представить под именем закона сохранения состояния. Отсюда вытекает, что сохранение состояния является существенным свойством всех тел и что все тела, пока они остаются таковыми, имеют стремление или способность навсегда сохранять свое состояние, а это есть не что иное, как сила инерции. Правда, не очень удачно причине этого сохранения дано имя силы, так как она неоднородна с другими собственно так называемыми силами, каковы, например, сила тяжести, и с ними не может сравниваться. В эту ошибку обычно попадали многие и прежде всего метафизики, обманутые двусмысленностью этого слова. Так как всякое тело по своей природе пребывает в том же состоянии или покоя или движения, то если тело не следует этому закону, но движется или неравномерно или по кривой,—это нужно приписать действию внешних сил. Такого рода внешними силами являются силы, о равновесии и сравнении которых трактуется в статике и которые, воздействуя на тело, изменяют его состояние, или приводя его в движение, или ускоряя, или замедляя, или же, наконец, меняя его направление.

Во второй главе я исследую, какого рода действие должна проявлять каждая сила по отношению к свободной точке, — находится ли эта точка в покое или движется. Отсюда выводятся истинные принципы механики, которыми должно объяснить все, что касается изменения движения. Так как до сих пор они были подкреплены слишком слабыми доказательствами, я доказал их так, чтобы для всякого было ясно, что они не только достоверны, но с полной необходимостью являются истинными.

Изложив принципы, на основании которых можно понять, каким образом, с одной стороны, сохраняется движение, с другой, — оно возникает или изменяется под влиянием сил, я перехожу к определению и исследованию самого движения тел, каклибо приведенных в движение при помощи сил. И прежде всего, конечно, я рассматриваю прямолинейное движение как самое легкое для определения; оно возникает, если под действием одной только силы свободная точка или бывшая в состоянии покоя приводится в движение, или находящаяся уже в движении ускоряется или замедляется в направлении действующей силы. Этому исследованию я посвятил третью и четвертую главы. В первой из них я исследую прямолинейное движение в пустом пространстве, во второй — то же прямолинейное движение в так или иначе сопротивляющейся среде. Хотя сопротивление можно свести к собственно так называемым силам, в этом сочинении мне показалось полезным изложить учение о перемене движения отдельно от сопротивления как по примеру других, которые писали по этому вопросу, так и вследствие существенной разницы, которая существует между абсолютными силами и сопротивлением. Ведь абсолютная или собственно так называемая сила имеет определенное, от движения тела не зависящее направление и сверх того одинаково воздействует как на тело, находящееся в движении, так и на тело, находящееся в покое; наоборот, направление сопротивления всегда совпадает с направлением самого движущегося тела и его величина зависит от скорости тела. Хотя в природе не встречается другого сопротивления, кроме того, которое пропорционально квадрату скорости, но я подверг обсуждению еще некоторые другие виды сопротивлений как для того, чтобы дать решение большего количества задач, касающихся движения в сопротивляющейся среде, так и, главным образом, для того, чтобы иметь случай предложить много прекрасных примеров вычисления.

Наконец, в двух последних главах я рассмотрел криволинейные движения тел, которые возникают, когда направление движущих сил не совпадает с направлением брошенного тела. В этом случае тело постоянно отвлекается от прямого пути и принуждено двигаться по кривой. В пятой главе я изложил подобного рода криволинейное движение в пустоте, в шестой я рассмотрел его же в сопротивляющейся среде. Главные задачи, которые даны в этих главах, заключаются в том, чтобы определить кривую, по которой может двигаться любое брошенное тело, подверженное действию каких угодно сил, и вместе с тем дать скорость тела в отдельных точках этой кривой, — при этом как в пустоте, так и в сопротивляющейся среде. Из этих основных предложений возникли тогда и другие, где или по данной кривой, описанной телом, или по тому или иному данному виду движения требуется найти как движущие силы, так и сопротивление. И в этом случае я прежде всего стремился к тому, чтобы охватить все относящиеся сюда задачи, разобранные Ньютоном и другими авторами, и дать настоящие решения на основе аналитического метода. На этом заканчивается этот первый том, который, равно как и второй, я составил так, чтобы человек, имеющий достаточный опыт в анализе конечных и бесконечных, мог с поразительной легкостью все это понять и все это произведение прочесть без чьей бы то ни было помощи.

Глава I

О ДВИЖЕНИИ ВООБЩЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1

1. *Движение есть перемещение тела из того места, которое оно занимало, в другое место. Покой же есть пребывание тела в том же месте.*

Следствие 1 [7]

2. Понятия движения и покоя могут относиться к тому, что занимает известное место. Поэтому, так как только телам свойственно занимать место, то только о теле и можно говорить, что оно движется или находится в покое.

Следствие 2

3. И это понятие движения и покоя настолько свойственно телу, что оно распространяется сплошь на все тела. Ведь ни одно тело не может существовать без того, чтобы двигаться или находиться в покое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2

4. *Место есть часть неизмеримого или бесконечного пространства, в котором находится весь мир. Принятое в этом смысле место обычно называют абсолютным, чтобы отличить его от места относительного, о котором речь будет ниже.*

Следствие 1

5. Итак, если тело последовательно занимает одну за другой части этого неизмеримого пространства, то оно движется; наоборот, если оно постоянно пребывает в одном и том же месте, тогда оно находится в покое.

Следствие 2

6. Однако обыкновенно представляют себе определенные границы этого пространства, к которым и относят тела. Это отношение и есть то, что называется положением. О тех телах, которые сохраняют то же самое положение относительно этих границ, говорят, что они находятся в покое. Наоборот, о тех телах, которые меняют свое положение, говорят, что они движутся.

Примечание 1 [8]

7. Если принять вышеназванные термины в указанном значении, то обычно движение и покой называются абсолютными движением и покоем. И эти определения этих терминов совершенно правильны и

естественны, они и применены к тем законам движения, которые будут изложены в дальнейшем. Но так как мы не можем выработать себе правильного понятия об этом неизмеримом пространстве и о его границах, о которых мы говорили в данных определениях, то вместо этого неизмеримого пространства и его границ обычно принимают во внимание конечное пространство и телесные границы, исходя из которых мы и будем судить о движении и о покое тел. Так, мы обычно говорим, что тело, которое по отношению к этим границам сохраняет одно и то же положение, находится в покое; если же тело меняет свое положение по отношению к этим границам, мы говорим, что оно движется.

Примечание 2

8. То, что мы говорили здесь о безграничном и неизмеримом пространстве, должно рассматриваться как чисто математические выражения. Хотя это, по-видимому, противоречит метафизическим спекуляциям, тем не менее оно хорошо подходит для нашей цели. Ведь мы не утверждаем, что есть подобного рода бесконечное пространство, — такое, что оно имеет точные и неизменные границы; но, не заботясь о том, есть ли такое пространство или нет, мы требуем только одного, чтобы тот, кто хочет исследовать вопрос об абсолютном движении и абсолютном покое, представил себе такое пространство и отсюда уже судил о состоянии покоя или движения

тел. Удобнее всего будет в конце концов договориться так, чтобы, отвлекаясь от окружающего мира, мы представили себе бесконечное и пустое пространство и допустили, что в нем помещены тела; если они в этом пространстве сохраняют свое место, то мы должны заключить, что они находятся в абсолютном покое; если же они переходят из одной части этого пространства в другую, то мы должны сказать, что они иаходятся в абсолютном движении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3

9. *Движение относительное есть перемена положения по отношению к какому-либо взятому по желанию пространству. Равным образом относительный покой есть пребывание в том же положении по отношению к тому же самому пространству.*

Если мы примем в качестве такого пространства Землю, то мы говорим, что то, что на Земле сохраняет свое неизменное положение, находится в покое; если же тело по отношению к Земле переходит из одного положения в другое, то мы говорим, что оно движется; и в этом смысле мы говорим, что Солнце движется. Подобным же образом на движущемся корабле те тела, которые занимают одно и то же место на корабле, находятся в относительном покое, и в относительном движении находятся те, которые на корабле меняют место.

Следствие 1

10. Относительное движение и относительный покой будут совпадать с абсолютными в том случае, если пространство или тело, по отношению к которому мы говорим о движении или покое, само находится в состоянии покоя по отношению к названному неизмеримому и бесконечному пространству. Так, если Земля действительно находится в покое, то все, что по отношению к ней находится в состоянии движения или покоя, находится также в состоянии абсолютного движения или абсолютного покоя.

Следствие 2

11. Но относительные движение и покой отличаются от абсолютных, если само это пространство находится в движении. Так, если Земля по отношению к бесконечному пространству не находится в состоянии покоя, то и те тела, которые по отношению к ней покоятся, не находятся в состоянии абсолютного покоя. Точно так же и абсолютное движение отличается от относительного движения, и вполне возможно, что тело, которое находится в состоянии относительного движения, оно же находится и в состоянии абсолютного покоя.

Примечание

12. Ясно, что это состояние относительного движения или покоя тел может определяться бесчисленным количеством способов: например, если мы будем

брать разные пространства, по отношению к которым будем судить о движении или покое, то у нас будут получаться разные относительные движения и разные состояния относительного покоя. Так, неподвижные звезды по отношению к Земле движутся, но любая из них по отношению к остальным находится в состоянии покоя. Равным образом планеты как по отношению к Земле, так и по отношению к неподвижным звездам движутся.

В дальнейшем я всегда буду понимать под словами „движение“ и „покой“ абсолютные движение и покой, если только я определенно не укажу, что то, о чем идет речь, относится также и к относительным движению и покою.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1

Теорема

13. *Всякое тело, которое передвигается в другое место при помощи абсолютного или относительного движения, проходит через все средние места и не может из начального места перейти сразу в конечное.*

Доказательство

С точки зрения абсолютного движения: если бы тело внезапно из начального места появилось в конечном, то было бы необходимо, чтобы в первом месте оно уничтожилось и тотчас же в последнем вновь появилось, чего не может быть по законам природы, если не будет чуда. Таким образом оно перейдет из начального места на какое-либо ближайшее, а с этого на следующее, пока, наконец, не достигнет конечного места.

С точки зрения относительного движения: если тело, которое заменяет собой бесконечное пространство, действительно находится в состоянии покоя, то имеет силу вышеприведенное заключение (§ 10). Если же оно движется, то оно и само должно пройти через каждое среднее место, и поэтому относительное движение будет еще и последовательным и тело пройдет через отдельные средние места. Ч. и Т. Д. [9].

Следствие 1

14. Из этого следует еще, что движение не может быть мгновенным, но нужно время, в течение которого тело перейдет из одного места в другое. Так как оно ведь должно пройти через отдельные средние места, то этого не может произойти при мгновенном движении.

Следствие 2

15. Следовательно, должна быть дана линия, по которой движется тело, и раз мы ее знаем, то на ней не будет ни одной точки, которой бы не коснулось тело, переходя из начального места в конечное. Обыкновенно эта линия называется пройденным путем.

Примечание

16. Все это легко применить также и к телам, вращающимся вокруг оси. В самом деле, хотя само тело не меняет своего положения, но в его частях можно признать присущее им движение, если рассматривать эти отдельные части как совершенно различные тела. Ведь отдельные части по отношению к бесконечному пространству нами понимаются как меняющие свое положение, и ни одна из них не находится в покое, кроме тех, что находятся на самой оси. Равным образом надо расматривать и все тела так, чтобы принимать во внимание положение и его изменение не только у самого тела в целом, но и у отдельных его частей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4

17. *Говорят, что тело движется равномерно или однообразно, если оно в равные промежутки времени проходит равные расстояния. Неравномерным же будет такое движение, когда в равные промежутки времени проходятся неравные расстояния или когда равные расстояния проходятся в неравные промежутки времени.*

Следствие 1

18. Тело, движущееся равномерно, в двойное количество времени проходит двойное расстояние, в тройное время — тройное расстояние, и вообще пройденные расстояния пропорциональны промежуткам

времени и, обратно, промежутки времени пропорциональны отрезкам пространства.

Например, если корабль, который плывет по морю равномерным движением, в один час проходит две мили, то в два часа он покроет четыре мили, в три — шесть миль и в n часов — $2n$ миль.

Следствие 2

19. Поэтому, если дается равномерное движение, то при помощи его мы будем иметь точную меру времени, которая может быть познана только из движения. В самом деле, если будут измерены расстояния, которые проходит тело, движущееся равномерно, то этим самым становится известным и отношение промежутков времени, в которые эти пути были пройдены.

Примечание

20. Деление времени на годы, дни и часы мы имеем, только исходя из движения, которое мы рассматриваем как равномерное. Предположив, что Земля не движется, древние решили, что Солнце движется равномерно, и время, в которое оно обходит вокруг Земли, они назвали днем. Затем они также предположили, что движение неподвижных звезд вокруг Земли является также равномерным, и промежуток времени, по истечении которого Солнце возвращается на то же самое место по отношению к этим неподвижным звездам, они решили считать за год. Наконец, эти промежутки времени они разделили на

равные части и таким образом получили часы и минуты. Отсюда легко выясняется, что если эти движения не являются, как они полагали, равномерными, то и эта мера времени является неправильной. И в самом деле, новейшие астрономы открыли в этих движениях неравномерность и нашли, что не все дни равны между собой; поэтому они обычно вносят поправки, пользуясь другими, более равномерными движениями; это они называют уравнением времени. Отсюда ясной делается неравномерность дней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5

21. *О всяком теле, которое движется, говорят, что оно имеет быстроту или скорость, и эта скорость измеряется тем расстоянием, которое тело двигаясь равномерно, проходит в данное время.*

Таким образом, если тело B при равномерном движении проходит двойное расстояние в то самое время, в которое тело A, двигаясь также равномерно, проходит одинарное, то говорят, что тело B имеет вдвое бо́льшую скорость, чем тело A.

Следствие 1

22. Так как тело при равномерном движении в равные промежутки времени проходит равные расстояния (§ 17), то тело, движущееся равномерно, будет иметь всегда одну и ту же скорость или быстроту. При неравномерном же движении тело последовательно приобретает то одну, то другую скорость.

Следствие 2

23. Скорость, которую имеет движущееся неравномерно тело в какой-либо точке проходимого пути, должна измеряться тем расстоянием, которое могло бы пройти в данное время тело, движущееся равномерно с этой же скоростью.

Следствие 3

23а [10]. Значит, скорость тела, движущегося равномерно, может быть абсолютно измерена тем расстоянием, которое в данный промежуток времени, скажем в секунду, проходит тело. И нужно считать, что тот, кто может определить расстояние, которое проходит в секунду какое-либо тело, может вполне знать скорость этого тела.

Примечание

24. Такой способ определения скорости распространен особенно широко. Мы видим, что моряки, которые хотят узнать скорость корабля, измеряют расстояние, которое проходит корабль в данный промежуток времени. Обычно принимают промежуток в четыре часа и исследуют, сколько миль сделал корабль за это время. И допуская, что корабль двигался равномерно, отсюда уже определяют, сколько футов проходил корабль в одну секунду [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2

Теорема

25. *Если два тела движутся равномерно, то их скорости будут прямо пропорциональны пройденным ими расстояниям и обратно пропорциональны временам, в которые эти расстояния проходятся.*

Доказательство

Пусть даны два тела A и a и их скорости C и c. Тело A проходит расстояние S за время T, а тело a — расстояние s за время t. Так как при равномерном движении пути пропорциональны времени (§ 18), то расстояние, которое тело a пройдет за время T, определится из пропорции

$$t:T = s:\frac{sT}{t};$$

значит, тело a за время T пройдет расстояние $\frac{sT}{t}$. В свою очередь, тело A за тот же промежуток времени T пройдет путь S. Скорости тел должны измеряться расстояниями, пройденными в одно и то же время (§ 18). Вследствие этого мы будем иметь

$$C:c = S:\frac{sT}{t}$$

или

$$C:c = \frac{S}{T}:\frac{s}{t}.$$

Из этого следует, что скорости прямо пропорциональны пройденным расстояниям и обратно пропорциональны временам, в которые эти расстояния были пройдены. Ч. и Т. Д.

Следствие 1

26. Из последней пропорции получается следующее равенство:

$$\frac{CT}{S} = \frac{ct}{s}.$$

Таким образом при всяком равномерном движении отношение произведения скорости на время к расстоянию, пройденному за это время, есть величина постоянная.

Следствие 2

27. Кроме того, мы еще будем иметь

$$T : t = \frac{S}{C} : \frac{s}{c}.$$

А из этого следует, что величина времени прямо пропорциональна пути и обратно пропорциональна скорости, т. е. пропорциональна пути, разделенному на скорость.

Следствие 3

28. Затем найденная пропорция превращается в следующую:

$$S : s = CT : ct,$$

откуда заключаем, что путь, пройденный в равномерном движении, пропорционален произведению скорости и времени.

Следствие 4

29. Если дана скорость равномерно движущегося тела и вместе с тем какой-либо пройденный путь, то можно найти время, за которое пройден этот путь; для этого нужно путь разделить на скорость. Так как это частное, как мы указали, всегда пропорционально времени, то мы будем вправе это самое частное использовать в качестве меры времени

Следствие 5

30. Как скорость можно выразить при помощи пройденного пути, деленного на время, так и сам путь можно выразить в виде произведения времени на скорость.

Примечание 1

31. Если скорость такова, что тело, движущееся с нею, проходит в секунду путь в три фута, — эту скорость мы выражаем числом 3, — то мы будем в состоянии найти время, в которое будут при том же движении пройдены, положим, 60 футов. А именно, разделим 60 на 3, — частное 20 будет указывать, что эти 60 футов пройдены в 20 секунд. И если спрашивается, какой путь проходится в 12 секунд, то получится 36 футов. И еще: у тела, которое в 6 секунд проходит 48 футов, скорость будет 8; это число показывает, что это тело в секунду проходит 8 футов.

Примечание 2

32. В дальнейшем мы всегда будем применять этот метод измерения времени, пути и скорости. А именно время мы всегда будем выражать в секундах, путь — в футах, а именно в рейнских футах [12]. Скорость же, как это мы уже делали, мы будем обозначать числом футов, которые проходятся за одну секунду времени. Впоследствии, однако, мы найдем лучший способ определять скорости, которым мы и будем пользоваться, но этот новый способ вытекает из данного и легко к нему сводится.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3

Теорема

33. *При каком угодно неравномерном движении можно допустить, что самые маленькие элементы пути проходятся равномерным движением.*

Доказательство

Подобно тому как в геометрии элементы кривых рассматриваются как крайне малые отрезочки прямой, точно так же и в механике неравномерное движение разлагается на бесконечное число равномерных. В самом деле, эти элементы или проходятся равномерным движением или изменение скорости в этих элементах настолько ничтожно, что ее увеличением или уменьшением можно пренебречь без всякой ошибки. Таким образом и в том и в другом случае выявляется справедливость предложения. Ч. и Т. Д.

Следствие 1

34. Значит, можно считать, что всякое изменение скорости при неравномерном движении происходит в начале каждого отдельного элемента, так как мы полагаем, что весь элемент пути проходится равномерным движением.

Следствие 2

35. Поэтому, согласно методу обозначения в анализе бесконечно малых, если скорость в первом элементе пути будет c, то во втором скорость будет $c + dc$, в третьем $c + 2dc + d^2c$ и т. д.

Примечание

36. Сила данного доказательства покоится на том основании, что то изменение скорости, которое может произойти, пока проходится бесконечно малый элемент пути, само должно быть бесконечно малым и исчезать сравнительно с той скоростью, которой уже обладает тело. Если бы это было не так, то внезапно могло бы возникнуть конечное движение, что было бы абсурдом. Однако может показаться, что это предложение является неприемлемым, если движение и скорость сами являются бесконечно малыми, и в таком случае их моментальное увеличение или уменьшение может иметь к ним конечное отношение. Но этот вопрос мы подвергнем обсуждению ниже, когда будем рассматривать происхождение движения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4

Задача

37. *Пусть движется тело любым неравномерным движением по линии AM* (рис. 1) *и пусть будет дана скорость тела в каждом месте. Определить время, в которое будет пройдена дуга AM.*

Решение

Пусть путь AM, будет ли то прямая или кривая линия, будет равен s и скорость, которую тело имеет в точке M, пусть будет c, которая будет некоторой функцией от s. Возьмем от M элемент Mm, который, согласно допущению, проходится равномерным движением и тоже со скоростью c. Обозначив Mm через ds, мы найдем, что время, в течение которого будет пройден этот элемент, будет равно $\frac{ds}{c}$ (§ 29). Интеграл этого выражения, равный $\int \frac{ds}{c}$, и будет равен времени, за которое будет пройдена вся дуга AM. К этому интегралу нужно будет, согласно известным правилам интегрирования, прибавить такую константу, чтобы при $s = 0$ получить время, равное нулю. Ч. и Т. Н. [13].

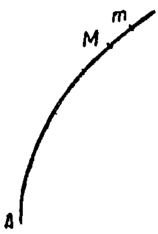

Рис 1.

Пример 1

38. Пусть будет скорость в M пропорциональна какой-либо степени уже пройденного пути AM, т. е. $c = s^n$; тогда мы будем иметь

$$\int \frac{ds}{c} = \frac{s^{1-n}}{1-n}.$$

Если $n < 1$ или имеет отрицательное значение, то к этому выражению константы прибавлять не надо: само $\frac{s^{1-n}}{1-n}$ даст время, в которое проходится дуга AM. Но если $1-n$ будет числом отрицательным, то мы будем иметь

$$\int \frac{ds}{c} = -\frac{1}{(n-1)\, s^{n-1}}.$$

Чтобы определить все время движения по AM, нужно к этому выражению присоединить константу

$$\frac{1}{(n-1)\, 0^{n-1}},$$

т. е. бесконечную величину. Таким образом в этих случаях нужно будет бесконечно большое время, чтобы тело перешло из A в какое-либо другое место M. Поэтому оно всегда будет пребывать в A и никогда оттуда не выйдет. Это будет действительно всякий раз, когда n будет числом положительным, большим единицы. Если же $n = 1$, то время не может быть выражено алгебраически; в самом деле, тогда получается

$$\int \frac{ds}{s} = \ln s;$$

причем сюда необходимо будет прибавить бесконечную величину, чтобы определить время движения по AM.

Следствие 1

39. Значит, в природе не могут существовать другие случаи, кроме тех, в которых скорость движения, — по крайней мере, вначале — пропорциональна такой степени пройденного пути, показатель которой меньше единицы.

Следствие 2

40. Пусть тело движется по прямой AM (рис. 2) и пусть его скорость в каком-либо месте будет пропорциональна ординате MN кривой AN. Эта кривая пересекается в точке A с прямой AM, так что скорость тела в начальной точке A равна нулю. Из предыдущего очевидно, что,

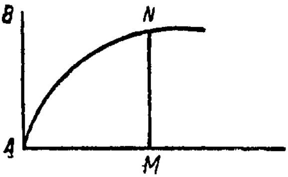

Рис. 2.

для того чтобы время, соответствующее AM, было конечным, необходимо, чтобы касательная AB в точке A была перпендикулярна к AM. В самом деле, когда M совпадает с A, MN должно быть равно AM^n, причем n должно быть величиной, меньшей единицы, т. е. дробью; отсюда и следует перпендикулярность касательной. Если же касательная AB образует с AM острый или же бесконечно малый угол, то время, соответствующее AM, будет равно бесконечности [14].

Пример 2

41. Пусть движется тело по прямой AB (рис. 3) так, что если описать над ней полукруг ANB, то скорость тела в какой-либо точке M будет пропорциональна ординате круга в этом месте MN. А это можно понять так, что скорость в точке M такова, что тело может с этой скоростью пройти в секунду времени путь, равный $m \cdot MN$.

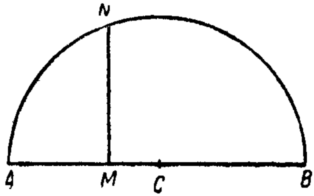

Рис. 3.

Допустим, что радиус AC этого полукруга равен a, а пройденный путь $AM = s$; тогда

$$MN = \sqrt{2as - s^2}.$$

Таким образом в точке M скорость, которую мы предположили равной c, будет в этом случае равна $m\sqrt{2as - s^2}$. Поэтому время, за которое проходится путь AM, будет равно

$$\int \frac{ds}{m\sqrt{2as - s^2}} = \frac{1}{ma} \int \frac{a\,ds}{\sqrt{2as - s^2}} .$$

Но ведь $\int \frac{a\,ds}{\sqrt{2as - s^2}}$ обозначает самую дугу круга AN. Поэтому время, в которое проходится путь AM, будет равно $\frac{AN}{m \cdot AC}$ секунд.

Время же, в течение которого тело движется от A до B, будет равно $\frac{ANB}{m \cdot AC}$ секунд. Отношение $\frac{ANB}{AC}$

приближенно равно $\frac{22}{7}$. Значит, это время будет равно $\frac{22}{7m}$ секунд.

Из этого вытекает, что, какова бы ни была длина линии AB, она всегда проходится в одно и то же время.

Следствие 3

42. Из решения этой задачи видно, что за то же самое время, за которое тело переходит из точки A в точку M (рис. 1), оно перейдет из точки M в точку A при обратном движении, если только при том и другом движении в одних и тех же местах оно будет иметь одинаковые скорости.

Следствие 4

43. Пусть MN (рис. 4), ординаты кривой AN, обозначают скорость, которую тело, движущееся по прямой AM, имеет в отдельных точках M, и пусть кривая в точке A образует с прямой AM угол меньше прямого. При этих условиях очевидно, что время, в течение которого тело перейдет из A в M, будет бесконечно большим. Поэтому и при обратном движении тело, движущееся из M по направлению к A, дойдет до A по истечении только бесконечного времени, т. е. не дойдет

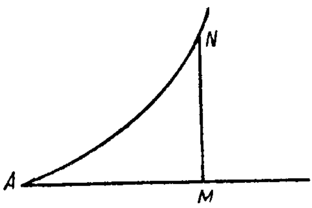

Рис. 4.

никогда, исключая только тот случай, когда оно в A имеет конечную скорость.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5

Теорема

44. *Пусть два тела движутся по прямым AM и am* (рис. 5) *и пусть их скорости будут выражены ординатами подобных кривых AN и an. Я утверждаю, что эти тела пройдут соответственные пути AM и am за одно и то же время.*

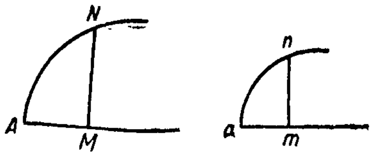

Рис. 5.

Доказательство

Если AM и am будут соответствующими путями, то они будут находиться в том же отношении, как и ординаты MN и mn; если это отношение равно $\frac{m}{n}$, то, положив

$$AM = s \quad \text{и} \quad MN = c,$$

мы будем иметь

$$am = \frac{ns}{m}$$

и

$$mn = \frac{nc}{m}.$$

Время, необходимое для прохождения пути AM, равно

$$\int \frac{ds}{c}$$

(§ 37). Время же, нужное для прохождения пути am, мы будем иметь, если в выражение

$$\int \frac{ds}{c}$$

подставим

$$\frac{n\,ds}{m}$$

на место ds и

$$\frac{nc}{m}$$

на место c.

Если мы это сделаем, то получится снова

$$\int \frac{ds}{c},$$

а это значит, что время, необходимое для прохождения путей AM и am, будет равно одному и тому же выражению

$$\int \frac{ds}{c}.$$

Значит, эти времена равны. Ч. и Т. Д.

Следствие 1

45. Отсюда становится понятным основание того, что было сказано в § 41; ведь все окружности подобны, а диаметры их соответствуют друг другу.

Следствие 2

46. Пусть у кривой AN будет такой параметр a, что при его изменении кривая AN будет меняться, оставаясь себе подобной. Чтобы это имело место, уравнение кривой AN должно быть такого вида

чтобы ордината c была функцией от a и s одного только измерения. Для различных значений a величина s будет обозначать соответственные пути, если положить ее равной a или na.

Итак, поскольку c определяется подобного рода уравнением, при любом a, большом или малом, путь na будет пройден в равные отрезки времени.

Примечание

47. Если c будет функцией от a и s одного измерения, то отрезки времени, соответствующие a или na, будут равны, каким бы ни было a. Точно так же, если c будет функцией m измерений от a и s, то отрезки времени, соответствующие a или na, будут пропорциональны a^{1-m}, каким бы ни было a.

В самом деле, $\frac{c}{a^{m-1}}$ будет функцией одного измерения от a и s, и ее мы обозначим через k. Таким образом

$$c = a^{m-1}k$$

и

$$\int \frac{ds}{c} = a^{1-m} \int \frac{ds}{k}.$$

Интеграл же

$$\int \frac{ds}{k}$$

при $s = a$ или na равен постоянной величине, как бы ни менялось a (§ 46). Следовательно,

$$a^{1-m} \int \frac{ds}{k}$$

равно некоторому числу, кратному степени a^{1-m}. Поэтому отрезок времени, соответствующий na, будет пропорционален a^{1-m}.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6

48. *Кривой скоростей называется кривая, ординаты которой представляют скорости, которые движущееся тело имеет в соответствующих местах проходимого им пути.*

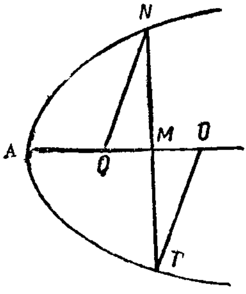

Рис. 6.

Таким образом кривой скоростей тела, движущегося по прямой AM (рис. 6), будет кривая AN, ординаты которой MN будут обозначать скорость тела в отдельных точках M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7

49. *Кривой времен называется та кривая, ординаты которой представляют промежутки времени, в течение которых проходятся соответствующие им части пройденного пути.*

Таким образом, если кривая AT (рис. 6) будет такого рода, что ее любая ордината MT обозначает время, в течение которого проходится путь AM, то кривая AT и будет кривой времен.

Следствие

50. Каким образом по данной кривой скоростей AN найти кривую времен, ясно из вышеприведенной

задачи (§ 37). В самом деле, если путь AM положить равным s, скорость в M, т. е. MN, — равной c и время, в течение которого проходится AM, т. е. MT, — равным t, то

$$t = \int \frac{ds}{c}.$$

Таким образом по данной кривой AN можно построить кривую AT при том предположении, что квадратуры возможны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6

Задача

51. *Дана кривая времен* AT (рис. 6). *Найти и построить кривую скоростей* AN.

Решение

Пусть будут, как раньше, $AM = s$, $MN = c$ и $MT = t$; нужно будет из данного уравнения между s и t найти уравнение между s и c. Это легко можно сделать из вышенайденного уравнения

$$t = \int \frac{ds}{c}.$$

При помощи диференцирования получается

$$dt = \frac{ds}{c}$$

и

$$c = \frac{ds}{dt}.$$

Пусть будет проведена в точке T нормаль TO к кривой AT; тогда мы будем иметь

$$\frac{ds}{dt} = \frac{MT}{MO}.$$

Подобно тому как MO относится к MT, пусть какая-либо линия, принятая за единицу, соответствующую одной секунде, так относится к четвертой пропорциональной, которая будет равна MN. Отложим от точки M отрезок $MQ = 1$ и проведем QN параллельно нормали TO; точка N и будет искомой точкой на кривой скоростей [15]. Ч. и Т. Н.

Пример 1

52. Пусть будет кривой времен прямая линия, как-нибудь наклонная по отношению к AM; при этом

$$t = ms$$

и

$$dt = m\,ds.$$

В таком случае мы будем иметь

$$c = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{m}.$$

Кривой скоростей, таким образом, будет прямая линия, параллельная к AM, так что тело будет двигаться равномерно.

Пример 2

53. Пусть отрезки времени будут пропорциональны какой-нибудь степени пройденных расстояний, т. е.

$$t = s^m,$$

и отсюда

$$dt = ms^{m-1}\,ds.$$

Отсюда мы получим

$$c = \frac{1}{ms^{m-1}} = \frac{1}{m} s^{1-m}.$$

Поэтому, если кривая AT будет аполлониевой параболой [16], т. е.

$$t = s^{\frac{1}{2}},$$

то

$$m = \frac{1}{2}$$

и

$$c = 2s^{\frac{1}{2}}.$$

А из этого ясно, что в данном случае кривой скоростей будет такого же рода парабола.

Следствие

54. Понятно также, что если дано уравнение между c и t, то можно найти пройденный путь s и обе кривые скоростей и времен. В самом деле, так как

$$c = \frac{ds}{dt},$$

то

$$ds = c\,dt$$

и

$$s = \int c\,dt.$$

Примечание

55. Здесь надо указать, что все то, о чем в достаточной мере мы говорили здесь о кривых скоро-

стей и времен, имеет в виду не только абсолютное движение, но также относится и к относительному. Ведь мы еще не рассмотрели самой природы движения и не выделили ничего, что было бы свойственно абсолютному движению. Теперь же мы хотим привести некоторые предложения, которые свойственны исключительно абсолютному движению и из которых можно будет понять некоторым образом внутреннее различне между движениями абсолютным и относительным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7

Теорема

56. *Тело, находящееся в состоянии абсолютного покоя, должно вечно пребывать в покое, если не получит побуждения к движению от внешней причины.*

Доказательство

Если мы допускаем, что это тело находится в бесконечном пространстве и при этом в пустоте, то ясно, что нет никакого основания, почему бы оно начало двигаться в том или другом направлении. Отсюда следует: так как нет достаточного основания, почему бы оно стало двигаться, то оно всегда должно будет оставаться в покое.

Это основание не теряет своей силы и для действительного мира, хотя и возможно возражение, указывающее на то, что в действительном мире не может быть достаточного основания того, почему тело двигается в эту сторону, а не в другую.

Не нужно думать, что единственной причиной пребывания тела в покое в этом бесконечном и пустом пространстве является отсутствие достаточного основання для движения: нет никакого сомнения, что в самой природе тела заложена причина этого явления. Разумеется, отсутствие достаточного основания не может считаться за истинную и субстанциальную причину какого-либо явления: оно только доказывает и притом самым строгим образом необходимость этого явления. Более того, оно доказывает и то, что в самой природе вещей скрыта настоящая субстанциальная причина, которая не перестает действовать, когда этого отсутствия достаточного основания уже нет.

Так, доказательство Архимеда о равновесии совершенно подобных с обеих сторон весов говорит о необходимости этого равновесия не только в пустоте, но и в действительном мире. В то же время это равновесие имеет и другое, подлинное основание,— то, которое имеет место в действительном мире.

Поэтому, поскольку верно то, что в пустом пространстве находящееся в покое тело должно пребывать в покое, постольку основание этого явления заложено в самой природе тела. Вследствие этого и в действительном мире покоящееся в какой-нибудь момент тело принуждено оставаться в покое до тех пор, пока оно не получит толчка от внешней причины. Ч. и Т. Д.

Следствие 1

57. Таким образом тот закон, что всякое тело, находящееся в покое, неизменно пребывает в покое до тех пор, пока не побуждается к движению другой внешней причиной,—этот закон заложен в самой природе вещей.

Следствие 2

58. Так как основание этого доказательства было выведено из самой природы абсолютного покоя, то неправильно этот закон распространять и на покой относительный.

Примечание

59. Что этот закон не имеет силы по отношению к покою относительному, в этом мы убеждаемся на опыте. Мы видим, что тела, находящиеся на корабле в относительном покое, если корабль внезапно получит толчок, не остаются в покое, а одновременно получают толчок и сдвигаются со своего места, хотя они раньше были в покое и хотя не появилось никакой причины, заставившей их сдвинуться.

Следствие 3

60. Тем же способом, которым мы основательно доказали, что раз находящееся в покое тело должно всегда оставаться в покое, если не получает воздействия от внешней причины, можно доказать, что тело, которое теперь находится в абсолютном покое, до этого также всегда находилось в покое, если оно

было предоставлено самому себе. В самом деле, так как нет никакого основания, почему бы ему в то место, которое оно занимает теперь, притти с этой, а не с той стороны, то надо заключить, что оно и раньше всегда пребывало в том же самом месте.

Следствие 4

61. Таким образом надо признать, что если тело находится в данный момент в покое и если не действует и не действовала на него никакая внешняя причина, то оно не только в будущем всегда будет находиться в покое, но оно и раньше всегда пребывало в покое.

Следствие 5

62. Из этого следует, что тело, приведенное однажды в абсолютное движение и предоставленное самому себе, никогда не может притти в состояние покоя. В самом деле, если бы оно в конце концов пришло в состояние покоя, то отсюда следовало бы, что оно и раньше всегда также находилось в состоянии покоя, что противоречит предположению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8

Теорема

63. *Если тело имеет абсолютное движение, то оно всегда будет двигаться равномерно, а также и раньше в любой момент времени его движение имело ту же скорость, — если только на него не*

действует или не действовала какая-либо внешняя причина.

Доказательство

Если бы движущееся тело не сохраняло всегда одной и той же скорости, то его скорость должна была бы или увеличиваться или уменьшаться. В последнем случае оно стало бы приближаться к покою, чего произойти не может, так как оно никогда не может достигнуть состояния покоя (§ 62). В первом же случае нужно было бы думать, что оно вышло из состояния покоя, что в равной мере было бы абсурдом. Кроме того, если принять, что это тело находится в бесконечном и пустом пространстве, и смотреть на тот путь, которым оно шло раньше и пойдет в дальнейшем, то нет никакого основания, почему бы оно имело бо́льшую или меньшую скорость в одном месте, чем в другом. Поэтому оно должно будет всегда двигаться с одной и той же скоростью. Ч. и Т. Д.

Следствие

64. Итак, всякий раз, когда мы видим, что движущееся тело начинает двигаться скорее или медленнее, мы должны это изменение приписать внешней причине.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9

Теорема

65. *Тело, обладающее абсолютным движением, будет двигаться по прямой, т. е. путь, который оно описывает, будет прямой линией.*

Доказательство

Если принять, что это тело находится в бесконечном и пустом пространстве, то нет никакого основания, почему бы оно отклонилось от прямой в ту или другую сторону. Из этого надо заключить, что от природы тела зависит то, что, находясь в движении, оно продолжает двигаться по прямой. Поэтому и в действительном мире, где этот принцип достаточного основания уже не имеет места, надо тем не менее признать, что всякое тело, приведенное в движение, должно в дальнейшем двигаться по прямому направлению, если, конечно, оно не встретит на своем пути препятствия. Ч. и Т. Д.

Следствие 1

66. Из двух последних предложений вытекает следующий общий закон: всякое тело, обладающее движением, будет двигаться равномерно по прямой линии.

Следствие 2

67. Таким образом, если тело, вынужденное под действием внешних причин итти по кривой AM (рис. 7), пришло в точку M и тут вдруг перестают действовать эти внешние причины, то оно пойдет равномерно по прямой линии с той же скоростью, которую оно

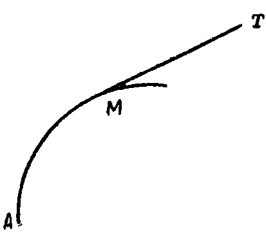

Рис. 7.

имело в M, и в том же направлении, которое у него было в момент освобождения от внешних причин. Действительно, касательная MT есть не что иное, как элемент кривой в M, продолженный в качестве прямой.

Поэтому тело, предоставленное в M самому себе, в дальнейшем пойдет равномерно по касательной MT и с той же скоростью, какую оно имело в M.

Примечание 1

68. Эти законы об абсолютном покое и движении некоторые авторы соединили вместе. Вот в каких словах излагается это Ньютоном в его „Принципах философии“: Всякое тело неизменно остается в своем состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока оно под влиянием воздействующих на него сил не бывает принуждено изменить свое состояние.

Следствие 3

69. Эти законы о продолжении движения относятся только к движениям абсолютным, и по отношению к движениям относительным они не имеют силы. Подобно тому как может произойти, что тела, находящиеся в относительном покое, не продолжают оставаться в покое, хотя на них не воздействуют никакие внешние причины (§ 59), точно так же тела, имеющие относительное движение, не всегда будут двигаться равномерно и прямолинейно.

Следствие 4

70. Итак, если на тело не действуют никакие внешние причины, то надо считать, что оно может относительно двигаться неравномерно и в то же время абсолютно или находиться в покое или двигаться равномерно и прямолинейно.

Отсюда некоторым образом можно понять, насколько отличается относительное состояние от абсолютного.

Примечание 2

71. В механических принципах астрономии, как они изложены Ньютоном, предполагается, что Солнце и неподвижные звезды со стороны внешних причин или совсем не подвергаются воздействию или подвергаются в такой малой степени, что это воздействие незаметно. Хотя мы не видим, чтобы Солнце двигалось по отношению к Земле равномерно и прямолинейно, однако наверное можно сказать, что оно абсолютно или пребывает в покое или движется равномерно и прямолинейно. Поэтому необходимо признать, что замеченные неравномерности в движении Солнца зависят от самой Земли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8

72. *Направлением движения, или его определением, является прямая, по которой движущееся тело стремится двигаться равномерно и по которой оно и на самом деле движется, если не встречает препятствия со стороны внешних причин.*

Следствие

73. Следовательно, тело, имеющее абсолютное движение, поскольку на него не действуют другие причины, всегда будет сохранять одно и то же направление движения и одну и ту же скорость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9

74. *Сила инерции* [17] — *это присущая всем телам (вложенная во все тела) способность или пребывать в покое или же равномерно продолжать движение по прямому направлению.*

Следствие

75. Хотя эту способность оставаться в покое и равномерно продолжать движение по прямому направлению мы доказывали, исходя из принципа достаточного основания, но мы уже отмечали, что не он является причиной этого явления, но что причина его заложена в самой природе тела. Эта зависящая от природы тел причина сохранения их состояния и есть то, что называется силой инерции.

Примечание

76. Кеплер первый ввел этот термин и применил его к той силе, имеющейся во всех телах, которая противодействует всему тому, что пытается изменить их состояние; и действительно, этот термин „инерция" более соответствует этой идее противодействия, чем той идее косности, с которой мы его соединили. Но легко понять, что эти определения фактически

друг от друга не отличаются; ведь сила одна и та же: и та, которая продолжает движение или состояние покоя, и та, которая противодействует препятствиям. Я предпочитаю пользоваться своим определением скорее, чем определением Кеплера, так как еще неизвестно, каким образом тела противодействуют воздействующим на них силам. Кроме того, ведь эта самая сила противодействия проистекает из данной способности сохранять состояние покоя или движения и поэтому она должна получить свое объяснение отсюда.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10

Теорема

77. *Если пространство, относительно которого определяется относительное движение, пребывает в абсолютном покое или движется равномерно и прямолинейно, то указанные законы о движении и покое будут иметь силу и при относительном состоянии тел.*

Доказательство

Если пространство, относительно которого рассматривается движение, находится в абсолютном покое, то предложение ясно само по себе. В самом деле, в этом случае относительные покой и движение совпадают с абсолютными, и поэтому здесь всякое тело всегда будет пребывать в покое либо будет двигаться равномерно и прямолинейно и в относительном смысле (§ 10).

Если же это пространство само движется равномерно и прямолинейно, то те тела, которые находятся в относительном покое, будут иметь то же абсолютное движение, которое имеет само пространство. Поэтому они также будут двигаться равномерно и прямолинейно и в силу своей природы будут в состоянии продолжать это движение, так что и в этом случае данный (§ 66) закон сохраняется. То же тело, которое находится в относительном равномерном и прямолинейном движении, когда само пространство имеет равномерное и прямолинейное движение, будет абсолютно двигаться равномерно и прямолинейно; это будет вытекать и из следующего предложения, и оно ясно само по себе.

Таким образом это относительное движение вполне согласуется с законом и вследствие этого оно будет в состоянии продолжаться без всякой внешней силы. Ч. и Т. Д.

Следствие 1

78. Следовательно, тело, не подвергающееся воздействию никакой внешней причины и находящееся или в относительном покое или в относительном равномерном и прямолинейном движении, будет служить доказательством того, что само пространство, по отношению к которому мы судим о движении этого тела, находится или в абсолютном покое или абсолютно движется равиомерно и прямолинейно.

Следствие 2

79. Равным образом такое относительное движение всегда само по себе будет сохраняться в своем состоянии. В самом деле, не только то тело, которое движется, движется абсолютно равномерно и прямолинейно, но также и само пространство, к которому мы относим это тело, движется согласно тому же самому закону. Поэтому и то и другое движение будет продолжаться само собой, и это относительное движение будет пребывать в том же состоянии, если не явится никакой внешней причины.

Следствие 3

80. Так как понятие, которое мы имеем о движении, есть только относительное понятие (§ 7), то эти законы недостаточны для того, чтобы понять, каково абсолютное движение какого-либо тела. Если мы видим, что какое-либо тело, на которое не действует никакая внешняя причина, движется равномерно и прямолинейно, то мы отсюда не можем сделать большего заключения, чем то, что это тело находится или в абсолютном покое или абсолютно движется равномерно и прямолинейно, но при этом мы не можем определить ни величины этого абсолютного движения, ни его направления.

Следствие 4

81. Следовательно, те выводы, которые мы получили из природы тел, а именно то, что они остаются

в своем состоянии или покоя или равномерного прямолинейного движения, — эти выводы относятся не только к абсолютному движению и покою, но и к тому относительному состоянию, при котором пространство или тело, относительно которого рассматривается движение, само движется равномерно и прямолинейно.

Примечание

82. Мы будем не очень беспокоиться об абсолютном движении, так как и относительное движение подчиняется тем же законам. И поэтому мы будем не раз менять это относительное движение на другие подобного же рода, но так, чтобы соблюдались изложенные условия, т. е. если мы будем его рассматривать по отношению к другому телу, тоже движущемуся равномерно и прямолинейно. В этом случае оно не перестанет двигаться дальше равномерно и прямолинейно, и это может произойти бесконечным числом способов, из которых можно будет выбрать тот, который будет наиболее подходящим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11

Задача

83. *Пусть тело абсолютно движется равномерно по прямой AL* (рис. 8) *и другое тело также движется равномерно по прямой AM. Нужно найти относительное движение тела, абсолютно движущегося по линии AL, по отношению к другому телу, движущемуся по AM.*

Решение

Пусть скорость тела, движущегося по AL, будет равна a, а скорость второго тела, движущегося по AM, будет равна b, и пусть оба эти тела одновременно выйдут из точки A. Ясно, что если мы допустим, что расстояния AL и AM пропорциональны скоростям a и b, то оба тела в одно и то же время придут в точки L и M. Если провести прямую ML, образующую с прямой AM угол AML, синус которого так относится к синусу угла ALM, как AL относится к AM, т. е. как a относится к b, то L будет обозначать то место, в котором будет находиться тело, движущееся по AL, в тот момент, когда второе тело находится в M. Так как нужно найти относительное движение первого тела по отношению ко второму, то нужно то тело, которое на самом деле движется по AM, рассматривать как бы находящимся в покое в точке A. Если мы мысленно перенесем M в A, то L перейдет в N, где N — конец отрезка AN, параллельного и равного ML.

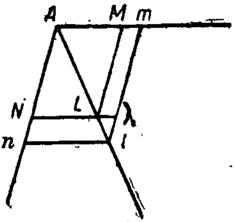

Рис. 8.

Равным образом, если тело, движущееся по AM, перейдет в ближайшее место m, то другое будет находиться в l и ml будет параллельно ML, так как

$$\frac{Mm}{Ll} = \frac{b}{a} = \frac{AM}{AL}.$$

Перенеся подобным же образом точку m в A, приняв $An = ml$, мы точку l перенесем в n, и n окажется на той же прямой AN. А из этого следует, что тело, движущееся абсолютно по AL, движется относительно по прямой AN. Относительная скорость будет относиться к абсолютной так, как Nn относится к Ll или как ML к AL.

Так как это отношение при данной форме треугольника ALM является постоянным, то тело, движущееся абсолютно по AL равномерно, будет двигаться относительно по AN также равномерно и прямолинейно.

Положение прямой AN мы найдем, взяв угол LAN таким, чтобы его синус так относился к синусу угла NAM, как b относится к a. Наконец, абсолютная скорость на AL должна относиться к относительной скорости на AN, как синус угла MAN к синусу угла LAM. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

84. Таким образом тело, движущееся абсолютно равномерно и прямолинейно, также и относительно будет двигаться равномерно и прямолинейно, если только тело, по отношению к которому рассматривается это движение, само движется также равномерно и прямолинейно. Это и есть то, что мы приняли в вышеприведенном (§ 77) доказательстве.

Следствие 2

85. Между прочим, построение линии AN и нахождение относительной скорости может быть легче всего выполнено следующим образом. Взяв, как мы уже и сделали, AL и AM пропорциональными a и b и проведя прямую ML, проведем ей параллельную AN из точки A; это и будет путь, описанный относительным движением. А относительная скорость будет относиться к абсолютной, как ML к AL.

Следствие 3

86. Тот же вывод справедлив и в том случае, если AL, так же как и AM, описывается не абсолютным движением, а относительным при одном и том же отношении. В таком случае в результате получится другое относительное движение тела, движущегося по AL по отношению к телу, движущемуся по AM.

Следствие 4

87. Итак ясно, что абсолютное движение может быть превращено в бесконечное число относительных, которые всегда будут равномерными и прямолинейными, если только таковыми были абсолютное движение и движения тех тел, по отношению к которым образуются относительные.

Примечание

88. При решении задачи мы приняли, что оба тела выходят из одного и того же места A. Но это

решение не менее удается, если оба тела вначале находились в различных точках A и B (рис. 9). Пусть тело A абсолютно движется равномерно по прямой AL, а тело B равным образом по прямой BM, причем скорости их относятся, как a к b. Допустим, что AL к BM относится так же, как a к b, и пусть оба тела одновременно придут в L и M.

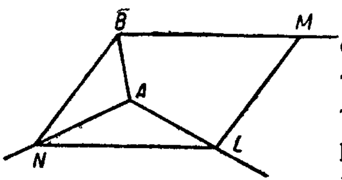

Рис. 9.

Так как отыскивается относительное движение тела A по отношению к телу B, то тело B нужно рассматривать как находящееся в покое в точке B. Перенесем мысленно тело B из M в B; тогда тело A перейдет из L в N, причем BN будет параллельна и равна ML. Я утверждаю, что точка N будет расположена на прямой, по которой тело A относительно движется и притом равномерно. Линия NL будет при этом равна и параллельна BM. Этими данными определяется форма треугольника ANL; поэтому NL будет находиться к AL в постоянном отношении. Значит, так как

$$NL = BM,$$

то отношение AL к BM будет постоянно, так что раз мы его примем равным отношению a к b, то оно всегда будет одно и то же.

Отсюда ясно, что точка N находится на прямой

AN, и относительная скорость по линии AN относится к абсолютной скорости по линии AL, как AN относится к AL, т. е. они находятся в постоянном отношении.

Таким образом относительное движение по линии AN будет прямолинейным и равномерным.

Следствие 5

89. Если дается абсолютное движение тела A (рис. 9) по прямой AL и его относительное равномерное движение по AN при любой скорости, то можно будет найти движение тела B, по отношению к которому рассматривается относительное движение тела A.

Допустим, что расстояния AL и AN пройдены за одно и то же время. Через любую произвольную точку B проведем прямую BM, параллельную NL; она и определит путь, описанный телом B, а его скорость будет относиться к абсолютной скорости тела A по линии AL, как NL к AL. Значит, тело B будет в B в то же время, в которое A находится в A.

Следствие 6

90. Так как точку B можно взять по желанию, то таким образом дается бесконечное число движений тела B, по отношению к которому получается одно и то же относительное движение тела A. Но скорость тела B всегда будет одна и та же, и ее направление будет параллельно линии NL.

Следствие 7

91. Понятно также, что движение абсолютное — равномерное и прямолинейное — может видоизмениться в любое относительное, но также равномерное и прямолинейное. В самом деле, прямую AN можно провести произвольно и допустить на ней любую скорость. Ведь движение тела B, из которого получается это относительное движение, всегда дается равномерным и прямолинейным.

Следствие 8

92. Это относительное движение может продолжаться само собой без всякой внешней силы. Ведь абсолютные движения по AL и по BM, как происходящие равномерно и прямолинейно, продолжаются сами собой. И как долго длятся эти движения, столько же времени должно продолжаться и относительное движение по AN.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12

Задача

93. *Тело A* (рис. 10) *абсолютно движется как угодно по линии AL, а тело B — по линии BM. Найти относительное движение тела A по отношению к телу B.*

Решение

Пусть на кривых AL и BM будут отрезаны дуги AL и BM, которые описываются в одинаковые промежутки времени. Поэтому тело A будет находиться в L в тот момент, когда B достигнет M. Но так как нужно найти относительное движение тела A по отношению к телу B, то тело B нужно рассматривать как бы находящимся в покое в точке B. Поэтому перенесем его мысленно из M по прямой MB в B; тогда тело L попадет в точку N, где N будет концом отрезка LN, параллельного и равного MB. Кривая, на которой найдена таким образом точка N, и будет путем, описанным телом A в относительном движении. И притом в этом относительном движении дуга AN будет описана за то же время, за которое будут описаны дуги AL и BM. А отсюда становится известной и относительная скорость в N. Ч. и Т. Н.

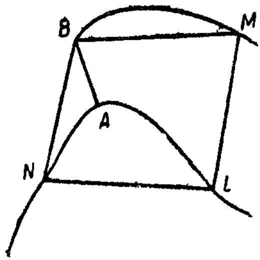

Рис. 10.

Следствие 1

94. Таким способом можно будет определить относительное движение тела, движущегося произвольно, по отношению к другому телу, движущемуся также как угодно.

Следствие 2

95. Из этого решения ясно, как можно найти кривую BM и движение по ней, если даны кривые AN и AL вместе с движениями по ним. Точно так же будет определяться и кривая AL по кривым BM и AN.

Следствие 3

96. Совершенно ясно также, что, ввиду того что точка B взята произвольно, кривая BM может быть проведена и иначе, бесконечным числом способов. Но так как у дуги BM, которая описывается за тот же промежуток времени, как AL и AN, хорда BM всегда равна и параллельна прямой LN, то она всегда будет себе подобна, равна и параллельна, и движение по ней будет всегда одно и то же.

Примечание

97. Это все то, что я счел нужным привести о сравнении движений абсолютных и относительных. Но относительное движение обычно описывается иначе следующим образом: движение по AN считается движением тела A, которое на самом деле движется по линии AL, если на это движение смотреть с тела B, движущегося по линии BM. Ведь зритель, по предположению, находится на теле B в состоянии относительного покоя, и само B рассматривается как находящееся в покое. Таким образом движение звезд, относительное с точки зрения Земли, совпадает с тем движением, которое мы наблюдаем, находясь на Земле и рассматривая ее как бы находящейся в покое. Ведь если Земля продвинулась из B в M, а звезда — из A в L, то мы видим ее из M в направлении ML и на расстоянии ML. А так как у нас нет представления, что мы сдвинулись с места B, а мы думаем, что мы все еще нахо-

димся в B, то мы будем видеть звезду из B не в L, но в N, т. е. в том же направлении и на том же расстоянии. Кроме того, прямая BN будет равна и параллельна прямой ML, как мы нашли и при нашем способе исследования.

ОБЩЕЕ ПРИМЕЧАНИЕ

98. Эти законы движения, которым подчиняется тело, предоставленное самому себе в смысле продолжения покоя или движения, имеют в виду, собственно говоря, тела бесконечно малые, которые могут рассматриваться как точки. Но и в телах, имеющих конечную величину, отдельные части которых имеют иные присущие им движения, всякая их часть, конечно, будет пытаться соблюдать эти законы, что, однако, не всегда будет возможно выполнить вследствие состояния тела. Итак, само тело будет следовать тому движению, которое слагается из стремлений отдельных частей, но это движение пока еще не может быть определено вследствие недостаточности принципов, и вопрос об этом надо отложить на будущее.

Итак, разнообразие тел предопределяет для нас первоначальное деление нашей работы. Сначала мы будем рассматривать тела бесконечно малые, т. е. те, которые могут рассматриваться как точки. Затем мы приступим к телам, имеющим конечную величину, — тем, которые являются твердыми, не позволяя менять своей формы. В-третьих, мы будем говорить о телах гибких. В-четвертых, о тех, которые допускают растяжение и сжатие. В-пятых, мы подвергнем исследованию движение многих разъединенных тел, из которых одни препятствуют другим выполнить свои движения так, как они стремятся это сделать. В-шестых, будет рассматриваться движение жидких тел. По отношению к этим телам мы будем рассматривать не только то, как они, предоставленные сами себе, продолжают движение, но, кроме того, мы будем исследовать, как на эти тела воздействуют внешние причины, т. е. силы [18].

При всех этих исследованиях большое различие вносит состояние тел, свободное или несвободное. Под термином „несвободное состояние“ я понимаю здесь то, когда тела встречают препятствия тому, чтобы продвигаться в том направлении, в котором они стремятся двигаться; таково движение маятников, которые, не имея возможности падать прямо, как они стремятся, производят на самом деле качания. А из этого понятно, что свободное состояние — это то, когда тела не встречают никакого препятствия для продвижения в любую сторону, куда они стремятся как благодаря собственной силе, так и получая воздействие от внешних сил.

Таким образом ясно, о чем должна итти речь в механике и как еще там много такого, что и до сих пор совсем не исследовано. Так как, кроме движения точек, о которых мы говорили до сих пор, там очень мало, что исследовано, то почти все, в сущности, приходится находить и выводить сначала.

Итак, я начинаю с движения свободных точек, получивших воздействие со стороны каких-либо сил, так как о движениях, которые эти точки совершают, будучи предоставлены самим себе, было уже указано в настоящей главе.

Весь этот первый том я предназначил для изложения вопроса о свободном движении точек, в следующем же томе я решил говорить о несвободном движении точек; и в том и другом томе исследование тех вопросов, которые мне встретятся, я буду проводить аналитическим методом, на основе как уже полученных здесь, так и приводимых в дальнейшем принципов.

Глава II

О ДЕЙСТВИИ СИЛ НА СВОБОДНУЮ ТОЧКУ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10

99. *Сила есть то усилие, которое переводит тело из состояния покоя в состояние движения или видоизменяет его движение* [[19]].

Подобного рода усилием, а следовательно, силой является тяжесть; ведь благодаря ей тела по устранению препятствий падают вниз из состояния покоя, и самое движение падения благодаря ей постоянно ускоряется.

Следствие

100. Всякое тело, предоставленное самому себе, или пребывает в покое или движется равномерно и прямолинейно. Поэтому всякий раз, когда свободное тело, находившееся ранее в покое, начинает двигаться или когда оно продвигается неравномерно или

непрямолинейно, причину этого надо приписать какой-нибудь силе: ведь все то, что может вывести тело из его состояния, мы называем силой.

Примечание 1

101. Учение о силах, о том, как они, будучи приложены к телу, находятся в равновесии и сохраняют тело в состоянии покоя, излагается в статике. Там сила определяется так, что она обозначает все то, что может приводить в движение тела. Вопрос о самом движении в статике не разбирается, а исследуются только те случаи, при которых несколько сил взаимно уничтожаются, тело же, на которое они действуют, остается в покое. Теперь, в механике, надо объяснить, каким образом действующие на тело силы, которые между собой не противоположны, на самом деле вызывают движение в теле, находившемся в состоянии покоя, а в теле движущемся изменяют движение.

Примечание 2

102. Имеют ли подобного рода силы свое происхождение в самих телах или же они существуют в в природе сами по себе, — этого здесь я не определяю. Достаточно здесь установить, что силы действительно существуют в природе, что доказывает хотя бы одна сила тяжести, вследствие которой все тела на Земле стремятся упасть вниз. Кроме того, подобного рода силы, воздействующие на тела, мы можем наблюдать на движениях планет, которые

должны были бы двигаться равномерно и прямолинейно, если бы на них не действовала никакая сила. Замечают, что подобные же силы присущи также телам магнитным и электрическим, которые притягивают к себе только определенные тела.

Иные думают, что все эти силы происходят от движения некоей тонкой материи, другие же приписывают самим телам эту силу притяжения и отталкивания. Что бы там ни было, мы с достаточной ясностью видим, что подобного рода силы могут получать свое начало из упругих тел и из вихрей, и в своем месте мы исследуем, откуда собственно можно объяснить эти явления сил. Мы попытаемся сначала определить действие той или иной силы на теле, чтобы затем, когда мы получим о них более полное представление, мы тотчас же могли бы применить к ним то, что нами здесь изложено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11

103. *Направление силы есть прямая, по которой она стремится двигать тело.*

Так, направление тяжести есть прямая вертикальная линия, ведь по ней стремятся падать тяжелые тела.

Примечание 1

104. В статике, где принимается, что все пребывает в покое, считают, что все силы всегда сохраняют одно и то же направление. В механике же, где тело всегда переходит с места на место, направление

движущей его силы непрерывно будет меняться. В различных положениях тела направления сил будут или между собой параллельны или будут сходиться в определенной точке, или же, наконец, будут подчиняться какому-нибудь другому закону. Этим и объясняется столь многообразное рассмотрение сил в механике.

Примечание 2

105. Из статики же надо заимствовать сравнение и измерение различных сил. Там указывается, что некая сила a так относится к другой силе b, как m к n, если сила a в точке A (рис. 11) будет приложена n раз в направлении AB, а сила b приложена m раз в обратном направлении AC и при этом точка A будет оставаться в равновесии. Тогда сила a, взятая n раз, равновелика силе b, взятой m раз, и получается, что

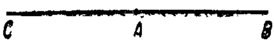

Рис. 11.

$$na = mb$$

или что

$$a : b = m : n.$$

Примечание 3

106. Однако механическая и статическая меры сил имеют следующее отличие друг от друга: в статике предполагается, что все силы сохраняют одну и ту же величину, в механике же, поскольку тело перемещается с места на место, считается, что на-

правления сил меняются и величина их также может меняться по определенному закону.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13

Теорема

107. *Если на точку действует несколько сил, то она получает от них то же движение, как если бы на нее действовала одна единственная сила, эквивалентная им всем.*

Доказательство

Пусть на точку A (рис. 12) действуют силы AB, AC, AD и AE и пусть AM будет эквивалентная им сила. Возьмем силу AN, равную последней и действующую в обратном направлении. Как известно из статики, она уничтожит действие сил AB, AC, AD и AE. Сила AN сообщила бы точке A столько же движения по направлению AN, сколько сообщат ей совместно действующие силы AB, AC, AD и AE по среднему для них направлению, каковым будет линия AM. Так как сила AM равна силе AN, то она настолько же продвинет точку A по направлению AM, насколько AN — по направлению AN. Но сила AM сообщит точке A столько же движения по направлению AM, сколько сообщат совместно действующие

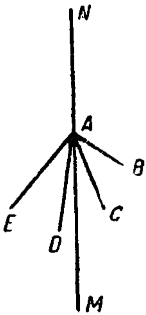

Рис. 12.

силы AB, AC, AD и AE по тому же направлению AM. Следовательно, и в том и в другом случае результат будет один и тот же. Ч. и Т. Д.

Следствие 1

108. Если, таким образом, на точку будет действовать несколько сил, то можно будет считать, как будто на нее действует одна единственная сила, которая эквивалентна всем им.

Следствие 2

109. Наоборот, вместо одной силы, действующей на точку, можно считать, что на нее действует несколько сил, которым она эквивалентна; и, как ясно из статики, это может осуществляться бесконечным числом способов.

Примечание

110. Как только тело сдвинуто со своего места, так силы, действующие на него, меняют и свое направление и свою величину, — или же предполагается, что меняют; поэтому и эквивалентная им сила в каждый любой момент будет иная. Поэтому приходится исследовать равнодействующую всех сил, воздействующих на точку для каждого отдельного момента, и нельзя считать, что на нее действует одна постоянная сила дольше, чем в течение бесконечно малого элемента времени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12

111. *Абсолютной силой является сила, которая в равной мере действует как на движущееся, так и на находящееся в покое тело.*

Такой абсолютной силой является сила тяжести, которая, — движутся ли тела или пребывают в покое, — в равной мере влечет их книзу.

Следствие

112. Если, таким образом, мы знаем действие абсолютной силы на тело, находящееся в покое, то мы так же точно знаем ее действие на тело, как угодно движущееся.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13

113. *Относительной силой является та, которая иначе действует на тело, находящееся в покое, чем на тело движущееся.*

Подобного рода силой является сила течения реки, увлекающего с собою тело. Чем скорее движется тело, тем меньше будет по отношению к нему сила течения, и она вообще исчезнет, если тело достигнет той же самой скорости, которую имеет течение [20].

Следствие 1

114. Таким образом, если дана скорость тела вместе с законом относительной силы, то можно будет найти величину силы, которая действует на тело. И ее можно будет рассматривать как силу абсолютную до тех пор, пока тело будет иметь одну и ту же скорость; ее

действие в этом случае можно определить, как определяется вообще действие абсолютных сил.

Определить величину относительной силы по отношению к телу, движущемуся с данной скоростью, есть не что иное, как указать абсолютную силу, в этом случае ей эквивалентную.

Следствие 2

115. Итак, абсолютные и относительные силы отличаются друг от друга тем, что величина и направление абсолютной силы зависят только от места тела, на которое они действуют; величина же и направление относительной силы зависят сверх того от скорости тела, на которое она действует.

Примечание 1

116. Относительные силы встречаются главным образом при движении тел в жидкостях; воздействие последних на тело зависит от их относительной скорости; чем она больше, тем большую силу испытывает тело от жидкости. Если не говорить о других случаях движения в жидкостях, которые требуют большего знания жидкостей, два случая являются для обсуждения более легкими: первый — когда жидкость находится в покое, второй — когда она движется равномерно и прямолинейно. При этом всегда можно будет один случай свести к другому, заменяя абсолютное движение относительным. Значит, жидкость надо будет рассматривать как находящуюся в покое,

в каком состоянии она и будет пребывать вследствие собственной своей силы.

Итак, то, что в дальнейшем будет говориться об относительных силах, то будет главным образом относиться к движению тел в покоящихся жидкостях. Действие жидкостей на движущиеся тела сводится к их торможению, и поэтому оно называется сопротивлением, которое становится тем больше, чем скорее движутся тела, и которое исчезает совершенно, когда тела приходят в состояние покоя. Поэтому в дальнейшем под относительными силами мы будем подразумевать сопротивляющуюся среду; о движениях же, которые производятся одними абсолютными силами, будем предполагать, что они производятся в пустоте.

Примечание 2

117. Если бы мы очень хотели сохранить порядок, то движение в сопротивляющейся среде мы должны были бы отнести к последней части нашей работы, которая предназначена для жидких тел, так как еще и доныне не установлено, по какому закону жидкости сопротивляются движущимся в них телам. Но так как этот вопрос большинство обычно рассматривает так, что совершенно отвлекается от природы жидкостей и рассматривает его как чисто математическую гипотезу, то и я предпочел следовать этому методу, чтобы не пройти мимо очень многих изящных задач, которым в обсуждении вопроса о жидкостях еще не уделялось внимания.

Однако этот вопрос о сопротивлении среды я применю только к движению точек, так как по отношению к телам, имеющим конечную величину, трудность расчета была бы непреодолима. Если же тела можно рассматривать наподобие точек, то отсюда проистекает следующее удобство: направление силы сопротивления будет совпадать с направлением движения, если, конечно, эта сила проистекает от покоящейся жидкости. Поэтому в этом сочинении, посвященном движению точек, мы будем приписывать относительным силам всегда то же самое направление, которое имеет сама точка, и будем всегда считать, что они замедляют движение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14

Задача

118. *По данному действию абсолютной силы на точку, находящуюся в покое, требуется найти действие той же силы на ту же точку, но движущуюся каким-либо образом.*

Решение

Пусть точка, находящаяся в A (рис. 13), движется со скоростью c по направлению AB, а направление действующей на нее силы пусть будет AC. Возьмем какой-либо элемент времени dt, и пусть за этот промежуточек времени [21] точка A, если бы она находилась в состоянии покоя в A, продвинулась бы на отрезочек AC, который мы назовем dz, так что по истечении времени dt она уже не будет в A, а будет в C. Таким образом это движение по AC и будет результатом действия силы на точку, находящуюся в покое.

Действие той же силы, которую мы считаем абсолютной, на ту же самую, но движущуюся точку должно быть равно действию на точку, находящуюся в покое (§ 111). Отложим в направлении движения точки A, которое она имеет по AB, отрезок AB, который она проходит со своей скоростью c за промежуток времени dt в том случае, если на нее нет воздействия со стороны какой-либо силы; тогда

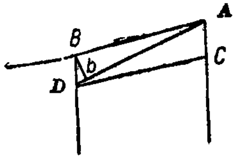

Рис. 13.

$$AB = cdt$$

(§ 30). При действии же силы, по истечении элемента времени dt, точка не будет находиться в B, но где-либо в другом месте, в D, причем действие этой силы, которое должно измериться отрезком BD, т. е. отклонением точки D от точки B, будет равно действию той же силы на точку, находящуюся в покое (§ 111), т. е. равно AC. Таким образом

$$BD = AC.$$

Кроме того, BD будет параллельна AC, так как BD есть действие силы и потому должно итти по ее направлению, которое не меняется, поскольку длительность промежуточка времени dt бесконечно мала. Поэтому точка A, обладающая скоростью c по направлению AB и испытывающая воздействие со стороны абсолютной силы, в конце промежуточка времени dt будет находиться не в B, а в D, причем BD равна и параллельна AC.

Пути, пройденные за бесконечно малый промежуточек времени, могут рассматриваться как маленькие прямые линии; поэтому надо признать, что точка в течение промежуточка времени dt прошла путь AD. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

119. Так как движения на бесконечно малых расстояниях могут считаться равномерными (§ 33), то скорость, с которой проходится элемент AD, будет равна $\frac{AD}{dt}$ (§ 30).

Следствие 2

120. Если скорость по AD будет равна $c+dc$, тогда как предшествующая ей скорость была равна c (§ 35), то

$$c+dc=\frac{AD}{dt};$$

раньше же было

$$AB=c\,dt,$$

из чего получается

$$c=\frac{AB}{dt}.$$

Таким образом мы будем иметь

$$dc=\frac{AD-AB}{dt},$$

Если на AD отрезать часть $Ab = AB$, то мы получим

$$dc = \frac{Db}{dt}.$$

Примечание 1

121. Надо заметить, что AC, или BD, в бесконечное число раз меньше AB, так как AB есть путь, пройденный с конечной скоростью за отрезок времени dt, тогда как AC является элементом пути, пройденным с бесконечно малой скоростью за то же время; ведь никакая сила не может в бесконечно малый промежуточек времени придать конечной скорости телу, находящемуся в состоянии покоя.

Следствие 3

122. Поэтому угол BAD будет бесконечно малым, и если соединить точки B и b, то отрезочек Bb будет перпендикулярен к AD. Пусть синус угла BAC,— а он дан,—будет обозначен через k, тогда синус угла BDb будет также k, так как он ему равен. Синус же угла DBb будет $\sqrt{1-k^2}$. Отсюда, так как

$$BD = AC = dz,$$

то мы будем иметь

$$Db = dz\sqrt{1-k^2},$$

и

$$Bb = k\,dz.$$

Следствие 4

123. Итак, приращение скорости dc, которое раньше мы нашли равным $\frac{Db}{dt}$, будет равно

$$\frac{dz\sqrt{1-k^2}}{dt}.$$

Ясно, что dz в бесконечно раз меньше, чем dt; ведь dz бесконечно мало по отношению к AB, т. е. по отношению к $c\,dt$, а следовательно, также и по отношению к dt, так как c принимается конечной величиной.

Следствие 5

124. После того как найдено приращение dc скорости, вызванное силой, мы можем также рассмотреть угол BAD, представляющий собой отклонение точки от присущего ей направления AB, — отклонение, которое также производится силой. Таким образом его синус будет равен

$$\frac{Bb}{AB}=\frac{k\,dz}{c\,dt}.$$

Следствие 6

125. Таким образом результат действия силы на движущуюся точку двоякий. Во-первых, он заключается в изменении величины скорости, во-вторых, в из-

менении ее направления. Первое дает приращение скорости

$$dc = \frac{dz\sqrt{1-k^2}}{dt},$$

второе — синус угла отклонения, равный

$$\frac{k\,dz}{c\,dt}.$$

Следствие 7

126. Если угол BAC будет прямой, и потому $k=1$, то

$$dc = 0.$$

Итак, в этом случае сила не меняет величины скорости. Синус же угла отклонения будет равен

$$\frac{dz}{c\,dt}.$$

Следствие 8

127. Если угол BAC является тупым, т. е. больше прямого, то его косинус

$$\sqrt{1-k^2}$$

будет отрицательным, и вследствие этого приращение скорости dc будет отрицательным:

$$dc = -\frac{dz\sqrt{1-k^2}}{dt}\ [22].$$

А это доказывает, что от воздействия силы скорость уменьшается. Отклонение же

$$\frac{k\,dz}{c\,dt}$$

остается то же, что и раньше

Следствие 9

128. Если направление AC силы совпадает с направлением AB движения точки A, то k становится равным нулю. Значит, в этом случае направление движения от воздействия силы не изменяется. Прирост же скорости dc становится равным

$$\frac{dz}{dt},$$

если направление силы совпадает с направлением движения. Если же оно будет противоположным, то

$$dc = -\frac{dz}{dt}\,[23].$$

Примечание 2

129. Из решения этой задачи ясно, каким образом нужно находить действие абсолютной силы на точку, движущуюся произвольным образом, если будет известно действие той же силы на эту точку, находящуюся в покое. Поэтому в дальнейших предложениях этой главы будет достаточно принимать, что точка, на которую воздействуют силы, находится в покое или движется в том же самом направлении, какое имеет и сама сила.

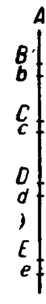

Рис. 14.

Пусть точка A (рис. 14) имеет скорость c и движется с нею по направлению AB. Если она в то же время получает воздействие со стороны силы, имеющей то же направление AB, то в конце промежуточка времени dt она будет находиться не в B, куда бы она пришла, обладая одной только скоростью c, но в b. Таким образом результатом действия силы будет отрезочек пути Bb. Если бы точка A находилась в покое в точке a, то за этот же промежуточек времени dt она продвинулась бы на такой же отрезочек ao (равный Bb). Таким образом из движения точки A, на которую действует сила, становится точно известным действие той же силы на ту же точку, но находящуюся в покое, и отсюда, далее, и действие силы на точку, движущуюся произвольно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15

Задача

130. *Дано приращение скорости точки A, которое производит какая-либо сила за промежуточек времени dt. Требуется найти для той же точки приращение скорости, которое эта сила произведет в другой промежуточек времени $d\tau$.*

Решение

Пусть точка A (рис. 14) имеет скорость c и то же самое направление движения AB, которое имеет и сила, действующая на нее, и пусть будет ao отрезочек пути, который эта сила заставила бы пройти точку A, если бы она находилась в покое, в течение промежуточка времени dt. Пусть, далее, AB будет расстоянием, которое проходит точка A со скоростью c за тот же промежуточек времени dt. Под влиянием силы точка пройдет расстояние Ab, причем $Bb = ao$; и надо признать, что это расстояние, так как оно бесконечно малое, точка описала равномерным движением.

В следующий промежуточек времени dt она с этой скоростью прошла бы расстояние $bC = Ab$, если бы на нее не действовала сила; но так как сила, которая считается постоянной, — по крайней мере, в течение бесконечно малого времени, — вторично оказывает свое действие, то точка пройдет дальше C, а именно, в c, причем $Cc = ao$. Равным образом, в третий промежуточек времени dt точка пройдет расстояние $cd = cD + Dd$, где $cD = bc$ и $Dd = ao$. И в четвертый промежуточек времени dt точка пройдет расстояние $de = dE + Ee$, где опять-таки $dE = cd$ и $Ee = ao$.

Таким образом

$$
\begin{aligned}
Ab &= AB + ao,\\
bc &= AB + 2ao,\\
cd &= AB + 3ao,\\
de &= AB + 4ao.
\end{aligned}
$$

Таким образом приращение скорости за промежуточек времени dt, вызванное силой, будет равно $\frac{ao}{dt}$; далее $\frac{2ao}{dt}$ будет приращение скорости за промежуточек времени $2dt$; равным образом, $\frac{3ao}{dt}$ будет полученное приращение за промежуточек времени $3dt$.

И вообще за промежуточек времени $n\,dt$ скорость c точки увеличится на элемент $\frac{n\,ao}{dt}$.

Допустим, $n\,dt = d\tau$, тогда $n = \frac{d\tau}{dt}$. Таким образом приращение скорости, полученное за промежуточек времени $d\tau$ будет равно $\frac{ao \cdot d\tau}{dt^2}$. Так как соответствующее промежуточку времени dt приращение скорости равно $\frac{ao}{dt}$, то получается следующая пропорция: приращение скорости за промежуточек времени dt так относится к приращению скорости, полученному за промежуточек времени $d\tau$, как dt относится к $d\tau$.

Отсюда следует, что приращения скорости пропорциональны временам, в течение которых они производятся. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

131. Ясно, что эти приращения скорости не зависят от самой скорости c, но будут иметь одну и ту же величину, как бы, великой или малой, ни принималась c. И это еще лучше можно понять из природы абсолютных сил, так как эти силы одинаково действуют на тела, находящиеся и в движении и в покое.

Следствие 2

132. Следовательно, если

$$c = 0$$

и точка A, находящаяся в покое, некоторой силой приводится в движение, то скорости, приобретенные с самого начала движения, будут пропорциональны времени: это значит, что за двойное количество времени точка получит двойную скорость, за тройное — тройную.

Следствие 3

133. Если скорость, приобретенную с самого начала движения за промежуточек времени t, мы назовем c, а пройденный путь будет s, то мы будем иметь

$$t = nc.$$

Но, кроме того,

$$t = \int \frac{ds}{c}$$

(§ 37). Отсюда вытекает:

$$nc = \int \frac{ds}{c}$$

или

$$n\,cdc = ds,$$

а отсюда

$$s = \frac{nc^2}{2} = \frac{t^2}{2n}.$$

Итак, пути, описанные с самого начала движения, пропорциональны квадрату времени или же квадрату скорости, приобретенной на протяжении этого пути.

Примечание 1

134. Справедливость того положения, что приращения скорости пропорциональны времени, в течение которого они производятся, имеет силу и по отношению к конечным величинам, если только сила,

приводящая в движение точку, остается одна и та же и сохраняет постоянно одно и то же направление совпадающее с направлением движения точки. При бесконечно малых нет необходимости в таком ограничении; ведь надо рассматривать, что сила, как бы изменчива она ни была, в самый короткий промежуток времени не способна ни к какому изменению.

Мы скоро приступим к изложению того, каковы действия различных сил, а также установим различие и в точках, на которые действуют силы, — так как та или иная точка может быть больше или меньше. И это различие не противоречит крайне незначительной величине точек; ведь мы имеем в виду не математические точки, а физические, из сложения которых получаются тела. Мы можем себе представить, что соединяются две или большее число точек вместе, и хотя это новое соединение и больше простой точки, однако оно будет обладать все же бесконечно малыми размерами.

Примечание 2

135. Теоремой, найденной из решения последней задачи, впервые воспользовался Галилей для исследования движения падающих тел. Ее доказательства он не дал, но вследствие поразительного ее совпадения с явлениями, он не хотел более сомневаться в ее правильности. Кроме того, он опроверг другие мнения по этому вопросу, чем немало подкрепил свое суждение.

Иные думали, что приращения скорости пропорциональны не времени, а пройденному пути; нелепость этой точки зрения уже тогда доказал Галилей и убедил в этом многих философов. Ясно, что если бы действия сил следовали этому закону, то никакие тела никогда нельзя было бы привести в движение. Ведь тогда было бы

$$dc = n\,ds$$

и

$$c = ns;$$

время же t, которое равно $\int \frac{ds}{c}$, получилось бы равным

$$\frac{1}{n}\int \frac{dc}{c} = \frac{1}{n}\ln c = \frac{1}{n}\ln ns + \text{const},$$

причем эта константа должна равняться $-\frac{1}{n}\ln 0n$.

Таким образом время было бы пропорционально логарифму пройденного пути, деленного на 0, и потому оно было бы бесконечно. Таким образом никакое тело из состояния покоя никогда не могло бы перейти в движение.

Правильно, таким образом, Галилей ответил своим противникам, что, приняв это положение, нужно было бы допустить, что конечное движение происходит мгновенно и что как-либо иначе произвести движение вообще было бы невозможно. Если бы даже принять, что вначале точка имела бесконечно малую скорость, то под влиянием подобного рода мнимой силы эта скорость никогда не могла бы стать конечной.

Таким образом из данного решения задачи ясно видно, что найденный закон является необходимым, и никакого другого, в силу принципа противоречия, существовать не может.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16

Теорема

136. *Сила q на точку b имеет то же действие, какое сила p имеет на точку a, если*

$$\frac{q}{p}=\frac{b}{a}\,[24].$$

Доказательство

Если $q=np$, то $b=na$. Допустим, что точка na разделена на n равных частей, из которых каждая будет равна a; каждая из этих частей пусть получает воздействие от n-й части силы np, т. е. от силы p. Пусть каждая часть увлекается своей силой, так же как точка a своей силой p. Эти части точки na, получая воздействие от своих сил, не будут отделяться друг от друга, а всегда останутся соединенными, если они с самого начала были соединены. Ясно, что оба эти случая имеют один и тот же результат и не отличаются друг от друга, воздействует ли сила np на точку na или любая часть a точки na получает воздействие от соответствующей части p силы np, — лишь бы только эти части не отделялись друг от друга. Отсюда подтверждается предложение, что na так же приводится в движение силой np, как точка a силой p. Ч. и Т. Д.

Следствие 1

137. Таким образом точка *na* получает от силы *np* такое же ускорение, какое точка *a* получает от силы *p*.

Следствие 2

138. Для того чтобы сообщить большой точке ту же скорость, как и меньшей, нужна большая сила и при этом во столько раз большая, во сколько одна точка больше другой.

Примечание 1

139. Это предложение заключает в себе основы для измерения силы инерции [17], так как на нем основывается все учение о том, как нужно учитывать материю или массу тел в механике. Следует обращать внимание на число точек, составляющих тело, которое должно быть приведено в движенне, и масса тела должна быть принята пропорциональной этому числу. Эти точки надо считать равными между собой но не так, что они равно малы, но так, что на них одна и та же сила производит равные действия. Если мы представим себе, что вся материя мира разделена на подобного рода равные точки или элементы, то количество материи каждого тела по необходимости надо будет измерять числом точек, из которых оно составлено. В следующем предложении я покажу, что сила инерции пропорциональна этому числу точек или количеству материи [25].

Следствие 3

140. Два тела равны между собой в смысле количества материи, если они составлены из одинакового числа точек. И два тела находятся в отношении m к n, если числа точек, из которых они состоят, находятся в том же отношении m к n.

Примечание 2

141. В дальнейшем будет показано, что этот самый метод измерения количества материи действительно применяется и всеми принят. Ведь массу тела нужно выводить из его веса, и количество материи принимается пропорциональным его весу. На опытах доказано, что все тела в пустоте падают одинаково, и поэтому все они благодаря силе тяжести ускоряются одинаковым образом. Отсюда необходимо следует, что сила тяжести, действующая на отдельные тела, пропорциональна их количеству материи. Вес же тела указывает на силу тяжести, которая на это тело действует. Поэтому, так как она пропорциональна количеству материи, то при помощи взвешивания мы как раз узнаем это количество материи в том смысле, который здесь мы придаем материи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17

Теорема

142. *Сила инерции каждого тела пропорциональна количеству материи, из которой оно состоит.*

Доказательство

Сила инерции есть присущее каждому телу стремление оставаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения (§ 74). Она определяется той силой, которая необходима, чтобы вывести тело из его состояния. Различные же тела в одинаковой мере выводятся из своего состояния силами, которые пропорциональны количествам материи, заключающимся в этих телах. А так как силы инерции этих тел пропорциональны этим силам, то, следовательно, они пропорциональны и количествам материи. Ч. и Т. Д.

Следствие 1

143. Из этого доказательства можно видеть, что одно и то же тело имеет всегда одну и ту же силу инерции, находится ли оно в покое или в движении. Ведь находится ли оно в движении или нет, на него в одинаковой мере воздействует одна и та же сила (разумеется абсолютная сила).

Следствие 2

144. Сила инерции не однородна ни с какой другой силой: самая маленькая сила производит действие на тело какой-угодно величины, как это будет показано в дальнейшем [26].

Примечание

145. Отсюда ясно происхождение термина „сила инерции“, который мы объяснили раньше (§ 76),

а именно из того, что сила инерции некоторым образом сопротивляется действию сил. Также и Ньютон в третьем определении своих „Princ. Phil. Nat.“ соединил одну и ту же идею и с силой инерции и с этой силой сопротивления и установил, что каждая из них пропорциональна количеству материи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18

Задача

146. *Дано действие одной силы на какую-нибудь точку. Требуется найти действие какой-либо другой силы на ту же точку.*

Решение

Пусть точка (рис. 15) находится в состоянии покоя в A и пусть действие на нее данной силы AB заключается в том, что под ее воздействием в течение промежуточка времени dt точка пройдет отрезочек пути Ab. Спрашивается, на какое расстояние будет продвинута та же самая точка в течение промежуточка времени dt под влиянием другой силы AC.

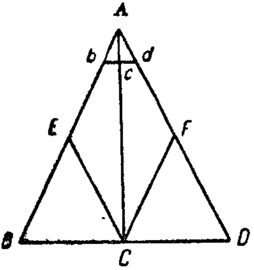

Рис. 15.

Проведем линии AB и AC так, чтобы соединительная линия BC была перпендикулярна к AC, что всегда можно сделать, если

$AC < AB$. Если же $AC > AB$, то решение легко будет выведено из первого.

С другой стороны, пусть будет проведена прямая AD так, чтобы BAD был равнобедренным треугольником. Пусть, далее, AB и AD будут разделены пополам в E и F и пусть AE является половиной силы AB, а AF — силой той же величины, как AE.

Ясно, что сила AC будет оказывать такое же действие на точку A, как и обе силы AE и A вместе (§ 107), так как AC эквивалентна обеим силам AE и AF вследствие параллелограма $AECF$. Тогда мы можем предположить, что точка A вместо одной силы AC получает воздействие от двух сил: AE и AF.

Теперь представим себе дело так, как будто каждая сила AE и AF действует на половину точки A. Положим, что эти половины на короткое время dt будут отделены друг от друга, а по его окончании внезапно вновь опять соединяются. Теперь, если сила AB продвигает точку A в течение промежуточка времени dt на отрезок Ab, то половина силы AE продвинет половину точки за тот же промежуточек времени dt на то же самое расстояние (§ 136). Равным образом, другая половина точки A будет продвинута за промежуточек времени dt силой AF на расстояние $Ad = Ab$.

По окончании этого промежуточка времени dt одна половина точки A будет в b, а другая — в d.

Пусть теперь они вновь внезапно соединяются,— скажем, будут стянуты бесконечно большой силой сцепления и сходятся в средней точке c отрезочка bd; ведь нет никакого основания, чтобы они сошлись ближе к b, чем к d. Так как силы AE и AF совместно действуют на A, то точка A в течение промежуточка времени dt будет продвинута на отрезочек Ac. Поэтому и сила AC, эквивалентная силам AE и AF, в течение промежуточка времени dt продвинет точку A на отрезочек Ac. Но bd параллельна BD, и поэтому $Ab : Ac = AB : AC$. Следовательно, если дан отрезочек Ab, по которому точка A продвигается силой AB, то этим будет дан отрезочек Ac, на который та же точка A продвигается за тот же промежуточек времени другой силой AC.

А отсюда ясно, что если будет дано действие Ac меньшей силы AC, то можно будет найти действие Ab большей силы AB. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

147. Таким образом расстояния, на которые одинаковые точки продвигаются какими-либо силами в равные промежутки времени, будут пропорциональны этим силам.

Следствие 2

148. Так как расстояния, пройденные с начала движения в неравные промежутки времени, пропорциональны квадратам времен (§ 133), то расстояния,

на которые одинаковые точки продвигаются какими-либо силами в неравные промежутки времени, будут пропорциональны силе и квадрату времени.

Примечание

149. Принцип, которым мы воспользовались при решении этой задачи, состоит в том, что мы приняли, что тело, на которое воздействует несколько сил, разделено на столько частей, что каждая из них находится под действием одной только силы. Затем, когда каждая из этих частей своей силой за элемент времени окажется продвинутой, мы допустили, что эти части внезапно сталкиваются друг с другом и соединяются в одно целое; при этом место, где они сошлись, будет тем местом, до которого дошло бы цельное тело под действием всех сил, одновременно действующих в течение одного и того же времени.

В правильности этого принципа можно убедиться из следующего: представим себе, что части тела соединены очень сильными пружинами; допустим, что хотя эти пружины действуют и непрерывно, однако время от времени они могут переставать действовать, а затем бесконечной силой могут внезапно сокращаться, так что промежуток времени, в течение которого разделенные до того части сводятся вместе, должен быть равен нулю.

Этим принципом пользовались и другие для решения многих задач по механике. И когда многие допускали, что силы проявляют свое действие не непрерывно, а скачками, то они, по существу, исходили из того же принципа.

Если же мы примем этот принцип, то ясно, что две одинаковые части должны приближаться друг к другу по прямой и что они должны слиться на середине соединяющего их отрезка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19

Теорема

150. *Пусть точка движется по направлению* AM (рис. 16) *и пусть на нее действует, пока она движется по отрезочку пути* Mm, *сила* p, *имеющая то же направление. Приращение скорости, которое за это время получит точка, будет пропорционально произведению действующей силы на промежуточек времени, в который точка проходит элемент* Mm *пути.*

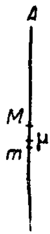

Рис. 16.

Доказательство

Возьмем промежуточек времени dt. Положим, что если бы на точку не действовала сила, а она продолжала бы двигаться равномерно с той же скоростью, которую она имеет в M, то за этот промежуточек времени она прошла бы путь $M\mu$. Действие силы состоит в том, что под ее воздействием точка продвигается дальше на расстояние μm, а этот отрезочек равен тому, на который была бы продвинута за тот же промежуточек времени dt этой силой та же точка, но находящаяся до того в покое, — сила считается абсолютной (§ 111). Этому отрезочку пути при данном промежутке времени пропорционально приращение скорости. Но если сила одна и та же, то приращение скорости пропорционально промежуточку времени dt (§ 130). Поэтому, так как отрезочек пути $m\mu$ или приращение скорости при данном промежуточке времени пропорциональны силе p, то приращение скорости при любом промежуточке времени и при любых силах будет пропорционально $p\,dt$, т. е. силе, умноженной на промежуточек времени. Ч. и Т. Д.

Следствие 1

151. Если скорость точки в M равна c и отрезочек пути Mm равен ds, тогда $dt=\frac{ds}{c}$; потому что для определения времени надо принять, что элемент пути Mm пройден движением равномерным. Но так как dc пропорционально $p\,dt$, то dc будет пропорционально и $\frac{p\,ds}{c}$, или $c\,dc$ пропорционально $p\,ds$.

Таким образом приращение квадрата скорости будет пропорционально произведению силы на пройденный элемент пути [27].

Следствие 2

152. Ясно, что эта теорема не только правильна, но и по необходимости должна быть верной, так что если бы мы предположили $dc=p^2\,dt$ или $p^3\,dt$ или же равным какой-либо другой функции вместо p, то

мы пришли бы к противоречию. Так как Бернулли в „Comment“ (том I) [28] все их рассматривая как равно вероятные, то я приложил много стараний для твердых доказательств этих предложений.

Примечание

153. Доказательство последнего предложения легче выводится из § 148, откуда вытекает, что отрезочек $m\mu$ пропорционален силе p, умноженной на квадрат промежуточка времени dt, так что $m\mu$ пропорционален $p\,dt^2$. Но ведь $m\mu$, деленный на время dt, дает приращение скорости; поэтому приращение скорости будет пропорционально $p\,dt$, как и было сказано в предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20

Теорема

154. *Если направление движения точки совпадает с направлением силы, то приращение скорости будет пропорционально силе, умноженной на промежуточек времени и деленной на материю или на величину точки.*

Доказательство

Пусть две неравных точки или два тельца A и B (рис. 17) движутся по прямым AM и BN. Пусть, в то время как они проходят отрезочки Mm и Nn, на них действуют соответственно силы p и π и пусть промежутки времени, в которые они их проходят, будут dt и $d\tau$. Ясно, что точка A испытывает такое же действие от силы $\frac{A\pi}{B}$, как точка B от силы π (§ 136). Поэтому, если мы подставим вместо B точку, равную A, то вместо силы π надо подставить силу $\frac{A\pi}{B}$, и таким образом мы получаем случай, рассмотренный в предыдущем предложении, где точки предполагались одинаковыми. Поэтому приращение скорости на отрезке Mm так относится к приращению скорости на отрезке Nn, как $p\,dt$ к $\frac{A\pi}{B}\,d\tau$ или как $\frac{p\,dt}{A}$ к $\frac{\pi\,d\tau}{B}$ (§ 150). Отсюда подтверждается предложение, что приращение скорости пропорционально произведению силы на промежуточек времени, деленному на материю точки, т. е. на величину ее. Ч. и Т. Д.

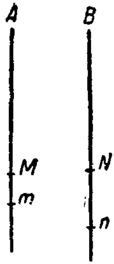

Рис. 17.

Следствие 1

155. Если, таким образом, скорость точки A будет c, то $dc = \frac{np\,dt}{A}$, где n во всех случаях обозначает одно и то же число и не зависит ни от силы, ни от промежуточка времени, ни от величины точки.

Следствие 2

156. Количество материи A вошло в наше рассуждение потому, что оно противодействует действующей силе, т. е. потому, что оно совпадает с силой инерции. Таким образом приращение скорости прямо

пропорционально действующей силе и промежуточку времени и обратно пропорционально силе инерции тела.

Следствие 3

157. Если путь $Mm = ds$, то $dt = \frac{ds}{c}$. Отсюда получается $dc = \frac{np\,ds}{Ac}$ или $c\,dc = \frac{np\,ds}{A}$.

Отсюда приращение квадрата скорости пропорционально произведению силы на пройденный отрезочек пути, деленному на массу или силу инерции тельца.

Примечание

158. Это предложение охватывает все установленные до сих пор принципы, определяющие природу и все законы движения, — если только направление силы совпадает с направлением движения. Поэтому, если это предложение соединить с предложением 14 (§ 118), которым определяется действие сил, действующих наклонно, то мы будем иметь все принципы, по которым можно найти движение точек под действием произвольных сил.

Следствие 4

159. Так как

$$dc = \frac{np\,dt}{A},$$

то отрезочек пути, на который продвигается точка A действием силы p в течение промежуточка времени dt, будет равен

$$\frac{np\,dt^2}{A},$$

так как этот отрезочек пути равен произведению dc на dt. Если назвать этот отрезочек пути dz, то

$$dc = \frac{dz}{dt}$$

и отсюда

$$dz = dc\,dt = \frac{np\,dt^2}{A}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21

Задача

160. *Определить действие какой-либо силы, действующей на движущуюся точку наклонно.*

Решение

Пусть точка A (рис. 13) имеет скорость c и направление AB и пусть на нее действует сила p, направление которой AC с AB составляет угол, синус которого есть k. Совершенно ясно, что точка A, предоставленная самой себе и не находящаяся под действием силы, пошла бы по прямой и за промежуточек времени dt прошла бы путь $AB = c\,dt$ (§ 30). Но так как действует сила p, то она отклонит точку A от прямой AB, и тогда эта точка пройдет отрезочек пути AD, как это указано в предложении 14 (§ 118).

Мы положили там AC или $BD = dz$, что является отрезочком пути, который прошла бы точка A под действием силы p за время dt, если бы она была перед тем в покое.

Таким образом $dz = \frac{np\,dt^2}{A}$ (§ 159). Следовательно, синус угла BAD, который мы нашли равным $\frac{k\,dz}{c\,dt}$ (§ 124), будет равен $\frac{nkp\,dt}{Ac}$, и приращение скорости dc, которое было равно $\frac{dz\sqrt{1-k^2}}{dt}$ (§ 123), становится равным $\frac{np\,dt\sqrt{1-k^2}}{A}$. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

161. Обозначим путь AD (рис. 18) через ds; тогда

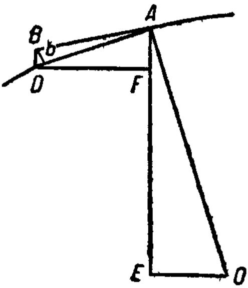

Рис. 18.

$$dt = \frac{ds}{c},$$

и отсюда, если на место dt мы подставим $\frac{ds}{c}$, то получим

$$dc = \frac{np\,ds\sqrt{1-k^2}}{Ac}.$$

Если из D на направление силы AE опустить перпендикуляр DF и AF обозначить через dy, а DF — через dx, то

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

и

$$k = \frac{dx}{ds},$$

а

$$\sqrt{1-k^2} = \frac{dy}{ds}.$$

В таком случае мы получим

$$dc = \frac{np\,dy}{Ac}$$

или

$$Ac\,dc = np\,dy.$$

Следствие 2

162. Если для кривой, которую таким образом описывает тельце, в A провести радиус кривизны AO, то $Bb:AB = AD:AO$. Поэтому

$$AO = \frac{AB \cdot AD}{Bb}.$$

Но ведь $\frac{Bb}{AB}$ является синусом угла BAD, который мы нашли равным $\frac{nkp\,dt}{Ac}$.

Значит,

$$\frac{Bb}{AB} = \frac{np\,dx\,dt}{Ac\,ds},$$

и отсюда, так как $AD = ds$, мы получим

$$AO = \frac{Ac\,ds^2}{np\,dx\,dt}.$$

Следствие 3

163. Так как

$$dt = \frac{ds}{c},$$

то

$$AO = \frac{Ac^2\,ds}{np\,dx}.$$

Обозначим радиус кривизны $AO = r$, тогда получится

$$nprdx = Ac^2\,ds.$$

Следствие 4

164. Если направление AE силы p совпадает с нормалью AO, то $AF = dy = 0$ и $DF = dx = AD = ds$. Поэтому $c\,dc = 0$, и таким образом, эта сила не изменяет скорости.

Следствие 5

165. Далее, в этом случае будет $npr = Ac^2$, вследствие того, что $dx = ds$, а потому

$$r = \frac{Ac^2}{np}.$$

Таким образом эта сила, нормальная к направлению движения тела, производит то, что тело будет совершать свое движение не по прямой линии, а по дуге кривой.

Следствие 6

166. Если направление силы p совпадает с касательной AB, то $dx = 0$ и $dy = ds$. Таким образом мы будем иметь

$$Ac\,dc = np\,ds.$$

Следовательно, в этом направлении сила p максимально увеличивает скорость тела.

Следствие 7

167. Если направление силы p совпадает с направлением, противоположным AB, так что оно будет противоположно движению тела, то p будет величиной отрицательной, и мы будем иметь

$$Ac\,dc = -np\,ds.$$

В этом случае скорость уменьшится настолько, насколько раньше она увеличивалась.

Следствие 8

168. И в том и в другом случае, когда направление силы p совпадает с касательной, мы будем иметь:

$$r = \frac{Ac^2\, ds}{np \cdot 0},$$

так как $dx = 0$.

В этом случае, значит, направление тела не изменяется и движение будет продолжаться по прямой.

Следствие 9

169. Если определить в одном только случае на основании опыта величину n, то она будет служить во всех случаях. Тогда можно будет определить все абсолютные величины, которые встречаются в случае движения.

Следствие 10

170. Из следствия первого выходит, что $A = \frac{np\, dy}{c\, dc}$; если это значение подставить в третье следствие, то мы будем иметь:

$$npr\, dx = \frac{npc\, dy\, ds}{dc},$$

или

$$r\, dx\, dc = c\, dy\, ds.$$

В это уравнение не входят ни n, ни A, ни p; поэтому оно справедливо для движения любой точки на которую действует любая сила,

Следствие 11

171. Но хотя в это уравнение сама сила p не входит, в нем остается ее направление, от которого зависит отношение элементов dx и dy. Поэтому, если дано направление силы, действующей на точку в любом месте, и дана кривая, по которой движется точка, то из этих только данных можно определить скорость точки в любом месте.

В самом деле, мы получаем

$$\frac{dc}{c}=\frac{dy\,ds}{r\,dx},$$

или

$$c=e^{\int\frac{dy\,ds}{r\,dx}},$$

где e обозначает число, гиперболический логарифм которого равняется единице.

Следствие 12

172. Так как

$$dt=\frac{ds}{c},$$

то

$$t=\int e^{-\int\frac{dy\,ds}{r\,dx}}ds.$$

Отсюда, таким образом, определяется время, в течение которого описывается любой отрезок кривой, — для этого не нужно больше никаких данных, кроме самой кривой и направления силы.

Следствие 13

173. Если из O опустить перпендикуляр OE на линию направления силы AE, то

$$ds : dx = AO : AE.$$

Если обозначить AE через q, то

$$\frac{r\,dx}{ds} = q.$$

Эта линия некоторыми [29] называется корадиусом. Итак, получается, что

$$c = e^{\int \frac{dy}{q}}$$

и

$$t = \int e^{-\int \frac{dy}{q}}\, ds.$$

Примечание

174. Из решения последней задачи ясно, что при его помощи можно определить движение точки, на которую действуют любые силы. Ведь из двух уравнений определяется и скорость точки в любом месте и кривизна, или радиус кривизны пройденной кривой. Из этого, вместе с тем, будет найдено и время, в которое будет пройдена любая часть кривой, — а эти данные с избытком достаточны для определения движения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.

175. *Восстанавливающая сила* [30] *есть та воображаемая и неопределенная сила, которая разде-*

ленные части тела мгновенно вновь собирает вместе и восстанавливает в прежнем положении.

Мы допустили наличие такого рода силы при решении предложения 18 (§ 146), где две части точки, принятые нами разъединенными на один момент, вновь были соединены.

Следствие 1

176. Если мы примем, что точки разделены на две равные части, и они будут отделены друг от друга силами, то восстанавливающая сила соединит их посредине прямой, соединяющей их, как это мы показали в § 146, исходя из принципа достаточного основания.

Следствие 2

177. Так как действие восстанавливающей силы должно проявиться мгновенно, ее можно рассматривать как пружину, обладающую бесконечно большой силой, при помощи которой разделенные части вторично соединяются.

Примечание

178. Применение этой восстанавливающей силы в некотором отношении уже ясно из предложения 18, но ее применение будет самое широкое в дальнейшем, когда мы приступим к исследованию движения тел конечной величины. Здесь же мы исследовали ее действие при соединении многих отдельных частей точки, и это исследование в дальнейшем окажет большую пользу.

Таким образом восстанавливающая сила понимается как некий принцип, с помощью которого могут быть легко решены очень многие вопросы; его мы назовем принципом восстановления.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22

Теорема

179. *Пусть две части точки, на которые она разделена, находятся в b и d* (рис. 19). *Я утверждаю, что восстанавливающей силой они будут соединены в точке c, центре тяжести частичек b и d.*

Доказательство

Пусть эти части были вначале соединены в A (рис. 19) и пусть они под действием сил AB и AD были передвинуты в b и d за один и тот же промежуточек времени dt. Равнодействующей этих сил пусть будет сила AC, которая может за тот же промежуточек времени передвинуть цельную точку из A в c. Очевидно, что части b и d должны соединиться под действием восстанавливающей силы в c, так как сила AC производит на цельную точку A то же действие, как обе силы AB и AD на две ее части (§ 149). Этим, таким образом, точно определяется точка столкновения c, в которой соединяются частицы b и d под

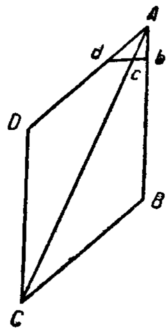

Рис. 19.

действием восстанавливающей силы. Тот отрезочек, на который частица b продвигается под действием силы AB за промежуточек времени dt, должен равняться

$$Ab = \frac{n \cdot AB \cdot dt^2}{b}$$

(§ 159), откуда

$$AB = \frac{Ab \cdot b}{n\,dt^2}.$$

На том же основании

$$AD = \frac{Ad \cdot d}{n\,dt^2}$$

и

$$AC = \frac{Ac\,(b+d)}{n\,dt^2}.$$

AC является диагональю параллелограма, который образуется силами AB и AD, так как она является их равнодействующей.

Из полученных трех уравнений мы получаем, что

$$\frac{AB}{Ab} + \frac{AD}{Ad} = \frac{AC}{Ac}.$$

Но AB, AD и AC относятся между собой, как синусы углов DAC, BAC и BAD. Поэтому

$$\frac{\sin DAC}{Ab} + \frac{\sin BAC}{Ad} = \frac{\sin BAD}{Ac}$$ [31],

а отсюда следует, что b, c и d лежат на одной прямой. Если это так, то

$$bc : cd = \sin BAC \cdot Ab : \sin DAC \cdot Ad =$$
$$= AD \cdot Ab : AB \cdot Ad.$$

А ведь

$$AD : AB = Ad \cdot d : Ab \cdot b.$$

Следовательно, мы получаем, что

$$bc : cd = d : b,$$

или

$$b \cdot bc = d \cdot dc.$$

Из этого ясно, что точка c является центром тяжести частиц b и d. Ч. и Т. Д.

Следствие 1

180. Где бы мы ни поместили точку A, точка столкновения c всегда падает на одно и то же место; отсюда ясно, что восстанавливающая сила имеет постоянное действие и не зависит ни от места точки A, ни от сил, действующих на частицы b и d.

Примечание

181. Действие восстанавливающей силы великолепно иллюстрируется действием силы упругости, которую и можно подставить на ее место. Пусть частицы b и d будут соединены упругой нитью bd, которая, стягиваясь, соединяет вместе b и d в c. Эта стягивающая сила в равной мере действует на частицы b и d, стремясь стянуться с обеих сторон в равной степени. Что касается расстояний, на которые в это время передвинутся b и d, то они будут обратно пропорциональны самим частицам (§ 159), так как на них действует одна и та же сила. Поэтому, если точкой соединения является c, то bc и dc будут обратно пропорциональны b и d, или

$$b \cdot bc = d \cdot cd.$$

А из этого становится ясным, что точка e является центром тяжести частиц b и d.

Следствие 2

182. Хотя, таким образом, восстанавливающая сила является воображаемой и существующей в одном только нашем представлении, однако с помощью ее можно вывести реальные законы движения. И мы можем быть вполне уверены в том, что с помощью принципа восстановления мы всегда дойдем до истины.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23

Теорема

183. *Пусть будут* a, b, c и d — *части точки, отделенные друг от друга, и пусть они вновь соединяются под действием восстанавливающей силы. Они соединятся в общем центре тяжести* g.

Доказательство

Предположим, что вначале цельная точка была в некоей точке O (рис. 20), и из этого места отдельные ее части a, b, c и d за промежуточек времени dt под действием сил OA, OB, OC и OD передвигаются в a, b, c и d. Пусть равнодействующей этих сил будет OG, которая за тот же промежуточек времени могла бы передвинуть цельную точку, равную $a + b + c + d$, из O в g; тогда g и будет той точкой, в которой под действием восстанавливающей силы соединятся части a, b, c и d (§ 149).

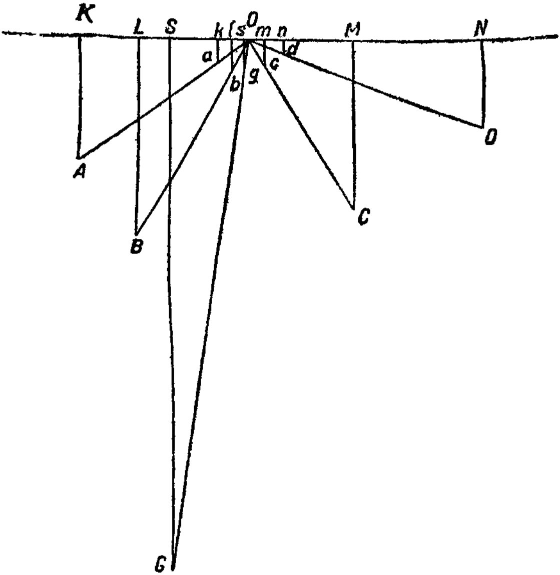

Рис. 20.

Проведем через точку O какую-либо прямую KN и на нее опустим перпендикуляры из точек A, a, B, b, C, c, D, d, G и g. Тогда мы получим:

$$OA = \frac{Oa \cdot a}{n\,dt^2},$$

$$OB = \frac{Ob \cdot b}{n\,dt^2},$$

$$OC = \frac{Oc \cdot c}{n\,dt^2},$$

$$OD = \frac{Od \cdot d}{n\,dt^2}$$

и

$$OG = \frac{Og\,(a+b+c+d)}{n\,dt^2}$$

(§ 159). Из подобия же треугольников OAK и Oak, OBL и Obl и т. д. мы получаем

$$AK = \frac{OA \cdot ak}{Oa} = \frac{ak \cdot a}{n\,dt^2},$$

$$BL = \frac{OB \cdot bl}{Ob} = \frac{bl \cdot b}{n\,dt^2},$$

$$CM = \frac{OC \cdot cm}{Oc} = \frac{cm \cdot c}{n\,dt^2},$$

$$DN = \frac{OD \cdot dn}{Od} = \frac{dn \cdot d}{n\,dt^2}$$

и

$$GS = \frac{OG \cdot gs}{Og} = \frac{gs\,(a+b+c+d)}{n\,dt^2};$$

кроме того, мы будем иметь

$$OK = \frac{OA \cdot Ok}{Oa} = \frac{Ok \cdot a}{n\,dt^2},$$

$$OL = \frac{OB \cdot Ol}{Ob} = \frac{Ol \cdot b}{n\,dt^2},$$

$$OM = \frac{Oc \cdot Om}{Oc} = \frac{Om \cdot c}{n\,dt^2},$$

$$ON = \frac{OD \cdot On}{Od} = \frac{On \cdot d}{n\,dt^2}$$

и

$$OS = \frac{OG \cdot Os}{Og} = \frac{Os\,(a+b+c+d)}{n\,dt^2}.$$

Но так как OG есть сила, равнодействующая для сил OA, OB, OC и OD, то из статики известно, что

$$AK + BL + CM + DN = GS$$

и

$$OK + OL - OM - ON = OS.$$

Таким образом мы получим

$$ak \cdot a + bl \cdot b + cm \cdot c + dn \cdot d = \\ = gs(a + b + c + d)$$

и

$$Ok \cdot a + Ol \cdot b - Om \cdot c - On \cdot d = \\ = Os(a + b + c + d).$$

Отсюда становится ясным, что точка g есть центр тяжести частиц a, b, c и d.

Следовательно, восстанавливающая сила соединяет эти частицы в общем центре тяжести g. Ч. и Т. Д.

Следствие 1

184. Итак, действие восстанавливающей силы заключается в том, что разделенные до того части тела, сколько бы их ни было, соединяются в общем для них центре тяжести.

Следствие 2

185. Пользуясь настоящим методом, можно определить движение точки, находящейся под действием нескольких сил, без нахождения их равнодействующей. Для этого нужно допустить, что действию отдельных

сил подвергаются какие-то части, соединяющиеся потом вновь в какой-то произвольный промежуточек времени восстанавливающей силой.

Примечание

186. Доказательство настоящей теоремы может быть проведено при помощи стягивающихся упругих нитей таким же образом, как это мы делали раньше (§ 181). Пусть до того разделенные частицы будут находиться в a, b, c и d (рис. 21), и предположим, что сначала нить соединяет только частицы a и b: они сойдутся в центре тяжести e. Теперь допустим, что частицы a и b, помещенные в e, соединяются с частицей c; место их столкновения будет f, которое является центром тяжести трех частиц a, b и c. Эти три частицы, помещенные в f, соединяются далее с четвертой частицей d: их точка соединения будет в g, — в центре тяжести всех четырех частиц a, b, c и d. Таким образом под действием восстанавливающей силы все частицы соберутся в общем центре тяжести.

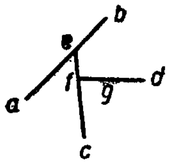

Рис. 21.

Следствие 3

187. Таким образом вновь выясняется, что восстанавливающая сила правильно может быть представлена при помощи сжатия упругих нитей, связывающих все частицы попарно.

ОБЩЕЕ ПРИМЕЧАНИЕ

188. Установив такие принципы, исходя из которых можно определить движение свободной точки, на которую действуют произвольные силы, мы перейдем теперь к исследованию движений свободных точек. Это исследование мы можем разделить на две части: в первой мы будем исследовать только прямолинейные движения, во второй же — любые криволинейные. Прямолинейные движения происходят, как это понятно из сказанного выше, тогда, когда направление движения совпадает с направлением силы; криволинейные — когда эти направления не совпадают.

И ту и другую часть мы будет рассматривать с двух точек зрения, согласно двойной природе сил, а именно: сначала будем предполагать, что точки получают воздействие от одних только абсолютных сил, а затем, что на них действуют совместно и абсолютные и относительные силы. Но вместо относительных сил мы подставим сопротивляющуюся среду, так как относительные силы, как мы указали выше, вводятся в рассмотрение в целях определения движения тел в жидкостях (§ 116). В соответствии с этим мы будем разбирать преимущественно те случаи, которые встречаются в природе вещей, и лишь немного задержимся на тех, которые существуют только в воображении.

Итак, прежде всего мы будем говорить о прямолинейном движении свободной точки под действием абсолютных сил. Затем мы исследуем прямолинейные движения свободной точки в сопротивляющейся среде. В-третьих, мы разберем криволинейные движения свободной точки, на которую каким бы то ни было образом действуют абсолютные силы. Наконец, в-четвертых, мы рассмотрим криволинейные движения свободной точки в сопротивляющейся среде [32].

Глава III

О ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ СВОБОДНОЙ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АБСОЛЮТНЫХ СИЛ

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 24

Теорема

189. *Если направления силы и движения расположены по одной и той же прямой, то движение будет прямолинейным.*

Доказательство

Всякое тело, вследствие врожденной ему силы стремится продолжать свое движение по прямому направлению и всегда его сохраняет, пока не встречает препятствий (§ 65). Мы уже показали, далее, что действие силы на движущееся тело двоякое: одно — благодаря которому меняется направление, другое — благодаря которому меняется его скорость. Но направление движения остается неизменным, если направление силы вместе с ним лежит на прямой (§ 128). Следовательно, в этом случае точка будет итти по прямой линии. Ч. и Т. Д.

Следствие 1

190. Поэтому в настоящей главе мы будем рассматривать только те случаи, когда направления движения и силы расположены на одной и той же прямой.

Следствие 2

191. Мы уже видели, что совпадение направлений силы и движения может произойти двояким образом, а именно: бывает, что оба эти направления тянут в одну сторону или в противоположные стороны. В первом из этих случаев скорость точки увеличивается, во втором — уменьшается (§ 128).

Примечание

192. В прямолинейном движении надо обращать внимание на два обстоятельства: первое из них — сила, действующая на точку в каком-нибудь месте; второе — скорость, которую она имеет в любом месте пути. Кроме того, к ним мы присоединяем третье — время, в которое проходится та или иная часть пути. Эти три величины так между собой связаны, что если дана одна из них, две остальных всегда могут быть определены.

Прежде всего мы будем считать, что дана сила. Затем мы ее выведем из данных величин скорости и времени.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 25

Задача

193. *Пусть точка, находившаяся в покое в* A (рис. 22), *будет продвинута по прямой* AP *под действием постоянной силы, т. е. такой силы, которая везде действует на точку с одним и тем же усилием. Определить скорость точки в каком-нибудь месте* P.

Рис. 22.

Решение

Обозначим массу или силу инерции точки буквой A, а сила, которая будет постоянной, т. е. везде имеющей одну и ту же величину, пусть будет обозначена буквой g. Пусть расстояние $AP = x$, а скорость в P, которая отыскивается, пусть будет принята равной c.

Возьмем элемент пути Pp, который будет равен dx, а приращение скорости, которое точка получает от силы g, в то время, когда она проходит элемент Pp, пусть будет dc.

При этих обозначениях мы будем иметь

$$c\,dc = \frac{ng\,dx}{A}$$

(§ 157), так как мы принимаем, что сила постоянно тянет вниз и потому ускоряет движение. Из этого уравнения, если его проинтегрировать, получается

$$c^2 = \frac{2ngx}{A} + \text{const};$$

константа должна определяться из того, что скорость в A равна нулю. Подставив сюда $c=0$ и $x=0$, мы получим const $=0$; поэтому мы будем иметь

$$c^2=\frac{2ngx}{A},$$

или

$$c=\sqrt{\frac{2ngx}{A}}.$$

Ч. и Т. Д.

Следствие 1

194. Таким образом точка A будет постоянно падать по прямой AP, и скорость в любом месте будет пропорциональна корню квадратному из пройденного уже пути.

Следствие 2

195. На основании этого могут быть сравниваемы падения многих точек под действием постоянных сил; ведь скорости будут пропорциональны корню квадратному из произведения силы на пройденный путь, деленного на массу.

Примечание 1

196. Этот случай больше всего подходит к падению тяжелых тел на Земле: ведь тяжесть, которая заменяет собой переменную силу, является постоянной на небольших расстояниях от поверхности Земли. Ведь вес любого тела на самых высоких горах и в самых глубоких долинах будет один и тот же, а вес служит для точного обозначения тяжести.

При свободном падении тяжелых тел скорости пропорциональны квадратному корню из пройденных высот. Это есть известное предложение Галилея, которое он первый открыл как на основании опытов, так и при помощи умозаключений.

Падение, однако, должно происходить в безвоздушном пространстве, так как воздух сопротивляется движению и извращает этот закон.

Примечание 2

197. Многими опытами доказано, что в безвоздушном пространстве, которое достигается при помощи пневматического насоса, любые тела падают с одинаковой скоростью. Из этого следует, что если не будет воздуха, то все тела, падая с равных высот, достигнут одинаковой скорости. Поэтому, если g будет обозначать силу тяжести, которая заставляет падать любое тело A, то $\frac{g}{A}$ будет всегда постоянной величиной.

Таким образом сила тяжести пропорциональна количеству материи тела, на которое она действует. А эта сила есть не что иное, как вес тела; поэтому вес тела пропорционален количеству материи.

Это предложение Ньютон доказывает в своих „Princ. Phil." и, кроме того, подтверждает на опытах с маятниками.

Следствие 3

198. Итак, любое тело на поверхности Земли, падающее с данной высоты, приобретает определенную

величину скорости. Следовательно, если мы знаем высоту, с которой падает тело, тем самым мы можем точно установить скорость, которую оно приобретет при этом падении.

Примечание 3

199. Итак, для измерения скоростей мы можем пользоваться теми высотами, падая с которых тяжелое тело на поверхности Земли приобретает эту скорость. Эта высота, конечно, не может стать на место самой скорости, так как скорости пропорциональны квадратному корню из высот. Но это не мешает, однако, тому, что квадрат скорости можно выражать высотой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15

200. *Высотой, соответствующей какой-либо скорости, мы будем после этого называть ту высоту, с которой тяжелое тело, падая на поверхность Земли, приобретает эту скорость.*

Следствие 1

201. Таким образом эта соответствующая высота пропорциональна квадрату скорости, которой она соответствует. Если, таким образом, скорость равна c, а соответствующая ей высота равна v, то v будет пропорциональна c^2.

Примечание 1

202. До сих пор скорость мы выражали прямой линией, которая могла бы быть пройдена за данное

время с этой скоростью. В дальнейшем же будет удобнее на ее место ввести соответствующую ей высоту. Поэтому мы положим

$$v = c^2 \quad \text{и} \quad c = \sqrt{v}.$$

Следовательно, в предыдущей задаче мы будем иметь такое уравнение:

$$v = \frac{2ngx}{A}.$$

Следствие 2

203. Итак, в дальнейшем всегда можно будет вместо скорости c ставить $\sqrt{v}$, т. е. квадратный корень из соответствующей этой скорости высоты.

Следствие 3

204. Если сила g обозначает самую силу тяжести, а x — соответствующую скорости c высоту, то $v = x$. Но ведь

$$v = \frac{2ngx}{A},$$

откуда мы получаем $n = \frac{A}{2g}$.

Таким образом мы достигаем того удобства, что уточняем значение буквы n, которая во всех случаях имеет одно и то же значение (§ 155).

Примечание 2

205. Так как g здесь обозначает силу тяжести, то $\frac{g}{A}$ будет величиной постоянной (§ 197). Мы ее

положим равной единице, что допустимо, так как силы не связаны с телами каким-либо определенным отношением, а тогда легко будет и в других случаях применять величину $\frac{g}{A}$, т. е. силу, деленную на тело [33].

Отношение $\frac{g}{A}$ к единице или g к A будет равно отношению силы g, действующей на тело A, к весу, который то же тело имело бы в наших странах. И таким образом буква A будет обозначать в дальнейшем не количество материи, а вес тела A, когда оно находится над Землей.

Таким образом мы будем сравнивать все силы с весом. Благодаря этому при измерении сил мы получим огромную выгоду и ясность.

Следствие 4

206. Так как в уравнении

$$n = \frac{A}{2g}$$

g обозначает силу тяжести, и мы условились, что

$$\frac{g}{A} = 1,$$

то

$$n = \frac{1}{2}.$$

Это значение n сохраняет всегда, если только скорости будут выражаться квадратными корнями из соответствующих им высот.

И отсюда в нашем случае будет

$$dv = \frac{g\,dx}{A}$$

и

$$v = \frac{gx}{A}.$$

Следствие 5

207. Поэтому общий закон

$$c\,dc = \frac{np\,ds}{A}$$

(§ 157), если скорости c соответствует высота v и следовательно,

$$c\,dc = \frac{dv}{2},$$

в силу того, что

$$n = \frac{1}{2},$$

этот закон будет иметь вид:

$$dv = \frac{p\,ds}{A},$$

где отношение p к A есть отношение силы p к весу тела A.

Следствие 6

208. Равным образом уравнения, данные в §§ 161 и 163, а именно

$$Ac\,dc = np\,dy$$

и

$$npr\,dx = Ac^2\,ds,$$

если в них подставить v на место c^2 и $\frac{1}{2}$ на место n, получают следующий вид:

$$A\,dv = p\,dy$$

и

$$pr\,dx = 2Av\,ds,$$

где отношение p к A имеет только что указанное значение.

Следствие 7

209. И в § 165 мы будем иметь уравнение

$$r = \frac{2Av}{p} \quad \text{или} \quad pr = 2Av.$$

Равно и в § 166

$$A\,dv = p\,ds,$$

и в случае § 167 получится

$$A\,dv = -p\,ds.$$

Таким образом n и c, которыми мы раньше пользовались как величинами неопределенными, мы свели теперь к определенным величинам [34].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 26

Теорема

210. *Если мы предположим различные, но постоянные силы, то высоты, падая с которых равные тела приобретают равную скорость, будут обратно пропорциональны силам.*

Доказательство

Пусть A будет масса или вес какого-нибудь тельца на поверхности Земли, g — какая-нибудь постоянная сила, а v — высота, соответствующая приобретенной скорости, x — высота, падая с которой тельце A под действием силы g приобретает данную скорость. Тогда

$$v = \frac{2ngx}{A}$$

(§ 202). Но ведь $n = \frac{1}{2}$ (§ 206). Значит, v становится равным $\frac{gx}{A}$, т. е.

$$Av = gx.$$

Поэтому, если скорости, произведенные различными силами, и самые тельца мы примем равными, то Av будет величина постоянная, — значит, и gx будет постоянно. Поэтому x будет обратно пропорционально g, т. е. высота, падая с которой тельце A под действием силы g приобретает скорость $\sqrt{v}$, будет обратно пропорциональна силе g. Ч. и Т. Д.

Следствие 1

211. Ньютон доказал, что если одно и то же тело находится на поверхности Солнца, Юпитера, Сатурна и Земли, то напряжение, т. е. сила, с которой эти планеты будут притягивать его к своему центру, будет пропорционально числам 10 000, 835, 525 и 410. Значит, высоты, падая с которых на поверхности

Солнца, Юпитера, Сатурна и Земли тело приобретет равные скорости, будут относиться между собой как

$$\frac{1}{10\,000}, \quad \frac{1}{835}, \quad \frac{1}{525} \quad \text{и} \quad \frac{1}{410}.$$

Следствие 2

212. Тот же Ньютон установил также, что все тела на поверхности этих планет падают одинаково, как и на поверхности Земли. Поэтому не надо добавлять условия, что тела должны быть равными, а, наоборот, все тела, которые падают на поверхности Солнца, Юпитера, Сатурна и Земли, приобретают одну и ту же величину скорости, если они падают с высот, пропорциональных

$$\frac{1}{10\,000}, \quad \frac{1}{835}, \quad \frac{1}{525} \quad \text{и} \quad \frac{1}{410}.$$

Примечание 1

213. Отсюда ясно, что действие любой силы на тело двоякое: благодаря одному телам сообщается напряжение или стремление; благодаря другому они на самом деле движутся. Первое рассматривается, главным образом, в статике и должно измеряться весом, который имеет определенное стремление книзу и может быть назван абсолютной силой [35]. Второе же действие должно измеряться ускорением или приращением скорости, которое сообщается телу за данный промежуток времени; значит, оно пропорционально этому напряжению или стремлению, деленному на массу тела (§ 154). Это действие Ньютон назвал

ускорительной силой. Другими словами, ускорительная сила пропорциональна абсолютной силе, разделенной на массу тела или же на вес.

Вследствие этого, так как

$$dv = \frac{p\,ds}{A}$$

(§ 207), и $\frac{p}{A}$ обозначает ускорительную силу, то dv будет равно произведению ускорительной силы на элемент пройденного пути.

Таким образом абсолютная сила тяжести пропорциональна массе тел, на которые она действует; этим обусловливается их стремление книзу, или их вес, который, как мы показали, пропорционален массе. Ускорительная же сила тяжести во всех телах одинакова, так как все они падают одинаково и за равные промежутки времени получают равные скорости.

Следствие 3

214. Итак, ускорительные силы пропорциональны абсолютным силам, если тела равны. Поэтому, так как ускорительную силу тяжести мы положили равной единице (§ 205), то ускорительная сила тяжести на Солнце равна 24,390. Эта же сила на поверхности Юпитера равна 2,036; на поверхности Сатурна она равна 1,280. А ускорительную силу тяжести на поверхности Луны Ньютон нашел равной $\frac{1}{3}$.

Следствие 4

215. Поэтому, если нужно применить предложение 25 к падению тел на поверхности Земли, то $\frac{g}{A} = 1$, как мы это приняли в § 205. Если же его надо отнести к падению тел на поверхности Солнца, то $\frac{g}{A}$ будет равно 24,390; для Юпитера $\frac{g}{A} = 2,036$ и для Сатурна $\frac{g}{A} = 1,280$; если же наконец мы относим его к падению тел на поверхности Луны, то $\frac{g}{A}$ будет равно $\frac{1}{3}$.

Примечание 2

216. Мы принимаем здесь вместе с Ньютоном, что все небесные тела подобны нашей Земле и что тела, находящиеся на их поверхности, имеют силу, влекущую их к их центрам, — силу, которая подобна тяжести земных тел. Из даниых Ньютона, таким образом, ясно, что тело, вес которого на Земле равен 1 фунту, на поверхности Солнца будет весить 24,39 фунта, на поверхности же Юпитера — 2,036 фунта, на поверхности Сатурна — 1,280 фунта и на поверхности Луны — третью часть фунта.

Примечание 3

217. Чтобы легче понять природу тяжести и подобных ей сил на небесных телах, надо усвоить, что отдельные равные элементы тел в равной мере испытывают воздействие со стороны тяжести. Из этого

следует — что подтверждено уже опытами, — что силы тяжести, которые действуют на любое тело, пропорциональны массам, т. е. количествам материи этих тел. Ведь уже раньше было доказано, что если действующие силы пропорциональны массам тел, то их действия на тела, которые должны двигаться, одинаковы (§ 136). Поэтому ясно, что все тела на поверхности Земли должны падать одинаково, равно как и на всех небесных телах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 27

Задача

218. *Точка A* (рис. 22) *под действием постоянной силы движется по прямой AP. Определить время, в течение которого проходится путь AP.*

Решение

Пусть, как и раньше, g будет действующая сила, x — путь AP, v — высота, соответствующая скорости, которую точка имеет в P. Тогда при

$$n = \frac{1}{2}$$

мы получим

$$v = \frac{gx}{A},$$

сама же скорость в P будет равна

$$\sqrt{v} = \sqrt{\frac{gx}{A}}.$$

Отсюда мы получим, что время, в течение которого проходится элемент пути $Pp = dx$, пропорционально

$$\frac{dx\sqrt{A}}{\sqrt{gx}}.$$

Обозначим время, в течение которого проходится путь AP, через t и положим, что

$$dt = \frac{m\,dx\sqrt{A}}{\sqrt{gx}}.$$

Значение m надлежит определить из какого-нибудь одного опыта, в котором должно быть измерено время в каких-либо определенных единицах, — положим, в секундах.

Из полученного уравнения, после интегрирования, мы будем иметь

$$t = 2m\sqrt{\frac{Ax}{g}},$$

где постоянного числа прибавлять не нужно, так как при

$$x = 0$$

t, как и должно быть, обращается в нуль.

Определив из опыта m, мы в результате получим, что

$$t = 2m\sqrt{\frac{Ax}{g}} \text{ секунд.}$$

Однако, чтобы такого рода численное значение времени было абсолютным, нужно, чтобы x было выражено также в определенных постоянных единицах. Мы длину x будем всегда определять в скрупулах, т. е. в тысячных долях рейнского фута. Напомним, что дробь $\frac{A}{g}$ выражается отвлеченным числом, так что нам нет надобности для этой дроби применять определенные единицы [36].

Итак, найдя значение m, что мы сейчас же и сделаем, мы будем иметь полное решение задачи. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

219. Если g обозначает тяжесть, то

$$\frac{A}{g} = 1$$

(§ 205). Вследствие этого время, в течение которого земное тело будет падать с высоты x скрупул, будет равно $2m\sqrt{x}$ секунд.

Следствие 2

220. Из опытов известно, что тело при падении проходит за секунду времени путь в 15 625 скрупул. Вследствие этого, если положить

$$x = 15\,625,$$

то должно получиться

$$t = 1.$$

Так как

$$t = 2m\sqrt{x},$$

то

$$1 = 2m\sqrt{15\,625},$$

т. е. равно 250 m.

В результате находится значение

$$m = \frac{1}{250}.$$

Следствие 3

221. Так как число m сохраняет во всех случаях одно и то же значение, то в задаче мы будем иметь

$$t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}} \text{ секунд.}$$

Если пройденный путь x выразить в скрупулах, то $\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ и даст число секунд, в течение которых пройден этот путь.

Следствие 4

222. Найденное здесь значение m может быть применено ко всем без исключения случаям. Если элемент пройденного пути обозначить через ds, а высоту, соответствующую скорости, с которой проходится этот элемент, — через v, то элемент времени

$$dt = \frac{m\,ds}{\sqrt{v}}$$

и

$$t = m\int\frac{ds}{\sqrt{v}}.$$

Если v и s выражены в скрупулах и если положить

$$m = \frac{1}{250},$$

то время t будет выражено в секундах:

$$t = \frac{1}{250} \int \frac{ds}{\sqrt{v}} \text{ секунд.}$$

Примечание 1

223. Благодаря тому, что мы скорости заменили квадратными корнями из соответствующих высот, мы получили то преимущество, что теперь всегда будем иметь абсолютную меру времени. При этом мы воспользовались опытом, который нам дал высоту, на которую опускается тяжелое тело при падении.

Гюйгенс в опытах с помощью маятников нашел эту высоту равной 15 парижским футам 1 дюйму $2\frac{1}{18}$ линии, т. е., в десятичных дробях, 15,0976 парижск. фут. Отношение рейнского фута к парижскому мы считаем равным отношению 1 000 к 1 035, а потому высота, проходимая при падении за одну секунду, получается равной 15,625 рейнск. фут. или же 15 625 скрупулам.

Мы предпочитаем пользоваться указанной единицей, а не парижским футом потому, что полученное число является квадратом, и мы избегаем таким образом многих извлечений корня. Помимо этого, чтобы время было выражено в секундах, нужно

$$\int \frac{ds}{\sqrt{v}}$$

(когда s и v выражены в скрупулах рейнского фута), разделить на 250, что очень легко запомнить.

Следствие 5

224. Так как $\frac{g}{A}$ обозначает ускорительную силу (§ 213), то время, в течение которого проходится под действием постоянной силы какой-либо путь, прямо пропорционально корню квадратному из длины пути и обратно пропорционально корню квадратному из ускорительной силы.

Следствие 6

225. Положив, что точка A, падая с высоты x под действием силы g, приобретает скорость c, мы получим, что c пропорционально $\sqrt{\frac{gx}{A}}$ (§ 193). Следовательно, ct будет пропорционально x, так как t пропорционально $\sqrt{\frac{Ax}{g}}$. А отсюда следует, что пройденный путь пропорционален времени движения и приобретенной при падении скорости; при этом действующие силы могут быть какие угодно, лишь бы они были постоянны.

Следствие 7

226. Пути, проходимые за одинаковые промежутки времени, пропорциональны ускорительной величине действующих сил.

Следствие 8

227. Следовательно, пути, проходимые телами за одинаковое время при падении на поверхности Солнца, Юпитера, Сатурна, Луны и Земли, относятся между

собой, как числа: 24 390, 2 036, 1 280, 333, 1 000 (§ 214).

Следствие 9

228. При том же предположении относительно ускорительной силы время, в течение которого проходится какой-либо путь, будет пропорционально приобретенным скоростям, а с другой стороны, как время, так и скорость будут пропорциональны квадрату пройденного пути.

Примечание 2

229. Мы здесь всюду исходили из того, что падающие тела начинают свое падение из состояния покоя, т. е. что их скорость в начале падения равна нулю. В дальнейшем мы будем исследовать и такие движения, которые возникают при таких условиях, что тела в самом начале движения уже имеют какую-то скорость.

В подобных случаях время и путь нужно понимать таким образом, что они берут свое начало в той точке, где скорость обращается в нуль. Ведь все полученные уравнения основаны на том, что когда обращается в нуль c или v, то одновременно обращаются в нуль x и t.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 28

Теорема

230. *Если тело падает по AP* (рис. 22) *так, как мы это до сих пор полагали, то скорость его в*

P будет такова, что если бы тело двигалось с этой скоростью равномерно, то за тот же самый промежуток времени, за который оно при падении прошло путь AP, оно могло бы пройти путь вдвое больший, чем AP.

Доказательство

Если оставить прежние обозначения, а именно, если тело будет A, сила g, пройденный путь x, скорость, приобретенная в P, будет $\sqrt{v}$ и время падения t, то мы будем иметь

$$t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}}$$

(§ 221) и

$$v = \frac{gx}{A}$$

(§ 206). Из последнего равенства получается

$$\frac{g}{A} = \frac{v}{x},$$

а следовательно,

$$t = \frac{x}{125\sqrt{v}} = \frac{2x}{250\sqrt{v}}.$$

Но это же выражение дает то время, в течение которого проходится путь $2x$ в случае постоянной скорости $\sqrt{v}$, так как $\frac{2x}{\sqrt{v}}$ разделено на 250, а это число мы нашли для выражения времени в секундах (§ 220).

Отсюда следует, что путь $2x$ будет пройден за тот же промежуток времени со скоростью $\sqrt{v}$, за который проходится путь x при равномерно ускоренном падении. Ч. и Т. Д.

Следствие 1

231. Следовательно, тело, на которое действует постоянная сила, пройдя при падении в течение времени t путь x, приобретает такую скорость, что, продолжая движение с этой скоростью равномерно, оно тот же самый путь x будет в состоянии пройти в половину времени t.

Следствие 2

232. Так как на поверхности Земли падающие тела в течение секунды проходят путь в 15 625 скрупул, то во время этого падения они приобретают такую скорость, с которой они при равномерном движении пройдут за одну секунду путь в 31 250 скрупул, а за полсекунды — 15 625 скрупул.

Следствие 3

233. Так как мы установили, что скорости можно выразить при помощи квадратных корней из высот, падая с которых они приобретают эти скорости, то скорость $\sqrt{15\,625}$, т. е. 125, это — такая скорость, с какой можно за секунду пройти путь в 31 250 скрупул.

Следствие 4

234. Таким образом легко определить путь, который проходится за одну секунду, если скорость выражается через $\sqrt{v}$. Так как описанный в течение

определенного времени путь пропорционален скорости, то пусть 125 так относится к $\sqrt{v}$, как 31 250 скрупул относится к $250\sqrt{v}$. Из этого мы будем иметь путь, выраженный в скрупулах и равный $250\sqrt{v}$, если высота v выражена тоже в скрупулах; этот путь можно пройти за секунду, если скорость равна $\sqrt{v}$, — движение, конечно, равномериое.

Пример 1

235. Пусть тело падает с высоты 1 000 футов; значит, выраженная в скрупулах v будет равна 1 000 000 скрупул. И вот, падая с этой высоты, тело приобретет скорость такой величины, что за секунду оно может пройти путь в 250 000 скрупул, т. е. в 250 футов.

Следствие 5

236. Обратно, если мы пожелаем скорость выразить через путь, который проходится с этой скоростью за одну секунду, то можно, как мы это делали вначале, свести дело к принятому нами приему, — прибегая к корням из соответствующих высот. И если путь равен a скрупулам, а соответствующая скорости высота равна v скрупулам, то мы будем иметь

$$250\sqrt{v} = a$$

и

$$v = \frac{a^2}{62\,500} \text{ скрупул.}$$

Пример 2

237. Пусть тело имеет такую скорость, с которой оно за секунду может пройти путь в 1 000 футов, т. е. 1 000 000 скрупул. Соответствующая этой скорости высота будет равна $\frac{1\,000\,000\,000\,000}{62\,500}$ скрупул или 16 000 футов.

Примечание

238. Таким образом делается ясным, в чем заключаются два способа определения скорости и как один приводится к другому. Сначала скорости мы выражали через путь, пройденный за секунду или за другое данное время. Затем мы нашли, что удобнее выражать скорости через соответствующие высоты.

Таким образом мы показали, как применяются оба способа определения скоростей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 29

Задачи

239. *Постоянная сила действует на тело по прямой BP* (рис. 23). *Тело имеет вначале данную скорость в том же направлении BP. Спрашивается, какова будет его скорость в какой-либо точке P прямой BP.*

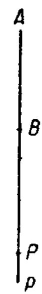

Рис. 23.

Решение

Пусть будет, как раньше, g — сила, A — тело. Пусть в точке B тело уже имеет скорость, соответствующую высоте c. Пусть $BP = x$, а высоту, соответствующую неизвестной нам скорости в P, обозначим через v. Как и раньше (§ 207), в случае постоянной силы g, действующей на элементе пути $Pp = dx$, будем иметь

$$dv = \frac{g\,dx}{A}.$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$v = \frac{gx}{A} + \text{const},$$

причем постоянная величина должна быть определена из того, что, положив $x = 0$, мы будем иметь $v = c$ (по условию); значит, $\text{const} = c$. А отсюда получаем, что

$$v = c + \frac{gx}{A}$$

и что сама скорость

$$\sqrt{v} = \sqrt{c + \frac{gx}{A}}.$$

Ч. и Т. Н.

Следствие 1

240. Допустим, как это бывает в случае тяжести, что $\frac{g}{A} = 1$; тогда

$$v = c + x.$$

Итак, высота, соответствующая скорости в P, есть сумма высоты, соответствующей начальной скорости в B, и пройденного пути.

Примечание

241. Здесь представляется возможным другое решение задачи; ведь мы можем рассматривать движение по BP с начальной скоростью в B, равной $\sqrt{c}$, как часть движения по линии AP из состояния покоя. Раньше мы нашли, что тело, когда оно пройдет путь от A до B, должно иметь скорость $\sqrt{c}$. Пусть этот путь будет $AB = k$, тогда мы будем иметь

$$c = \frac{gk}{A}$$

(§ 206) и

$$v = \frac{g(k+x)}{A} = c + \frac{gx}{A},$$

как это было найдено выше. Путь же AB будет равен $\frac{Ac}{g}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 30

Задача

242. *При тех же данных, что и в предыдущем предложении, определить время, в течение которого проходится путь BP* (рис. 23).

Решение

Если время, затрачиваемое для прохождения BP, обозначить через t, то мы будем иметь

$$dt = \frac{m\,dx}{\sqrt{c + \frac{gx}{A}}}$$

(§ 218); скорость же, с которой проходится элемент пути Pp, будет равна

$$\sqrt{c+\frac{gx}{A}},$$

как это мы нашли в предыдущем предложении.

Интегрируя полученное уравнение, мы получим

$$t=\frac{2mA}{g}\sqrt{c+\frac{gx}{A}}+\text{const}.$$

Постоянная, которую нужно будет прибавить, будет найдена из того условия, что при

$$x=0$$

и

$$t=0.$$

Отсюда мы получим

$$\text{const}=-\frac{2mA}{g}\sqrt{c}.$$

Поэтому в результате мы получим

$$t=\frac{2mA}{g}\sqrt{c+\frac{gx}{A}}-\frac{2mA}{g}\sqrt{c}.$$

Выразив c и x в скрупулах и положив

$$m=\frac{1}{250}$$

(§ 220), мы получим время, выраженное в секундах. Ч. и Т. Н.

Следствие

243. Так как в наших областях

$$\frac{g}{A}=1,$$

то время, в течение которого проходится путь BP с начальной скоростью $\sqrt{c}$ в B, будет равно

$$\frac{1}{125}\sqrt{c+x}-\frac{1}{125}\sqrt{c}\ \text{секунд},$$

если c и x будут выражены в скрупулах.

Примечание

244. Приводим другое решение этой задачи, найденное тем же способом, как и в примечании к предыдущему предложению.

Пусть тело A падает по прямой $AB = k$ и пусть оно в B приобретает скорость, соответствующую высоте c. Тогда время, в течение которого проходится этот путь AB, будет равно

$$\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ak}{g}};$$

время же, в течение которого проходится путь AP, будет равно

$$\frac{1}{125}\sqrt{\frac{A(k+x)}{g}}$$

(§ 221). В таком случае на отрезок BP будет потрачено время

$$\frac{1}{125}\sqrt{\frac{A(k+x)}{g}}-\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ak}{g}}.$$

Но

$$k=\frac{Ac}{g}$$

(§ 241). Поэтому искомое время, затрачиваемое на прохождение пути BP, будет равняться

$$\frac{A}{125g}\sqrt{c+\frac{gx}{A}}-\frac{A}{125g}\sqrt{c},$$

как это мы нашли и раньше, если там вместо m подставить $\frac{1}{250}$.

Все, что до сих пор мы излагали, касается прямолинейного падения точек в предположении, что действующая сила постоянна. Перехожу теперь к прямолинейным подъемам, при которых направление скорости прямо противоположно направлению действующей силы, которую я и теперь буду считать постоянной.

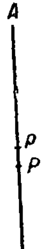

Рис. 24.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 31

Задача

245. *Постоянная сила направлена сверху вниз, тело же в B* (рис. 24) *имеет данную скорость, направленную снизу вверх. Найти скорость тела в любой точке пути BA, который оно проходит при подъеме.*

Решение

Ясно, что в этом случае тело будет двигаться по прямой замедленным движением (§ 191), так как направление его движения прямо противоположно направлению действующей силы.

Пусть скорость тела в B будет соответствовать высоте c и допустим, что тело уже достигло P. Обозначим высоту, которая соответствует скорости в этом месте, через v, пройденный путь BP — через x. Если принять $Pp = dx$, то в p высота, соответствующая скорости, будет $v + dv$. Но так как сила, которую я принимаю равной g, противоположна движению, то она проявляется в уменьшении движения. Поэтому, если A обозначает массу тела, то dv надо принять равным $-\frac{g\,dx}{A}$.

Если же

$$-dv = \frac{g\,dx}{A},$$

то при интегрировании последнего выражения получится

$$C - v = \frac{gx}{A}.$$

Для определения постоянной C положим $x = 0$ и в этом случае v должно превратиться в c; а отсюда получится

$$C = c.$$

Из всего этого получится уравнение

$$c - v = \frac{gx}{A}, \quad \text{или} \quad v = c - \frac{gx}{A},$$

что вполне определяет скорость тела в любой точке пути, описанного при подъеме. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

246. Следовательно, скорость тела станет равной нулю, когда c сделается равной $\frac{gx}{A}$, т. е. когда тело дойдет до высоты $x=\frac{Ac}{g}$. Пусть BA будет этой высотой и тем самым равной $\frac{Ac}{g}$; отсюда

$$c=\frac{BA\cdot g}{A}.$$

Из этого ясно, что BA есть та самая высота, падая с которой тело A под действием силы g приобретает скорость c [37] (§ 206). Таким образом тело, поднимаясь кверху с той скоростью, которой оно достигло, падая с данной высоты, достигает до этой самой высоты прежде чем потеряет свое движение.

Следствие 2

247. Кроме того, тело, поднимаясь по пути BA, в каждой отдельной точке будет иметь ту самую скорость, которую оно в ней имело бы, если бы оно падало из точки A. Ведь положив $AP=y$, мы при падении из A будем иметь скорость в P равной $\sqrt{\frac{gy}{A}}$; скорость же, оставшаяся у тела в этой точке P при подъеме из B, равна $\sqrt{c-\frac{gx}{A}}$. Но так как

$$x+y=BA=\frac{Ac}{g},$$

то ясно, что эти выражения скорости равны, так как ведь

$$\frac{gy}{A}=c-\frac{gx}{A}.$$

Следствие 3

248. Таким образом движение тела поднимающегося совпадает с движением тела падающего, и скорости того и другого тела в тех же самых местах, т. е. на тех же самых расстояниях от высшей точки, где скорость равна нулю, будут одинаковыми.

Следствие 4

249. А из этого очевидно, что и время подъема по пути BA равно времени падения по тому же пути.

Поэтому, если $BA=a$ и время падения будет равняться

$$\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Aa}{g}}\text{ секунд}$$

(§ 221), то той же величине должно равняться и время подъема по BA; если вместо a подставить его значение, а именно $\frac{Ac}{g}$, то время полного подъема окажется равным

$$\frac{A}{125g}\sqrt{c}.$$

Следствие 5

250. Подобным же образом можно найти и время подъема на любую высоту BP; если AP обозначить

через y, то время подъема или падения по AP будет равно

$$\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ay}{g}};$$

если мы вычтем это время из времени полного подъема

$$\frac{A}{125}\sqrt{c},$$

то остаток и будет временем прохождения пути BP Но

$$y=\frac{Ac}{g}-x;$$

поэтому время подъема на высоту BP будет равно

$$\frac{A}{125g}\sqrt{c}-\frac{A}{125g}\sqrt{c-\frac{gx}{A}}.$$

Примечание 1

251. Это сходство подъемов и падений с полной очевидностью можно доказать a priori, исходя из действия самих сил. Так как при подъеме сила отнимает от скорости столько, сколько при падении к ней прибавляет, то ясно, что между обоими движениями должно быть полное сходство и не должно быть никакого различия, кроме как в направленности времени; и значит, если время перевернуть, — само собой разумеется мысленно, — то один случай перейдет в другой. Таков вообще характер всех движений, вызванных абсолютными силами: тело может итти в обратном направлении по тому же самому пути

с теми же скоростями, если только при обратном движении оно будет испытывать те же воздействия, которые испытывало при прямом пути, но в обратном порядке.

Так, если бы планеты вначале получили свое движение в обратную сторону, то они вращались бы вокруг Солнца по эллипсам точно так же, как и теперь, но в противоположную сторону. Ведь на одном и том же элементе пути действие силы в смысле изменения скорости всегда остается одно и то же, но только в случае обратного движения оно по отношению к телу становится отрицательным. Действие же, которое применяется для изменения направления тела, в обоих случаях остается неизменным, благодаря чему тело при прямом и обратном движении движется по одному и тому же пути. Но это будет яснее ниже, где будет говориться о подобного рода движениях систематически.

Если, однако, есть сопротивление, то это сходство между подъемом и падением исчезает: ведь и в том и в другом случае сопротивление одинаково уменьшает движение тела, и его действие в одном случае не является противоположным действию в другом, как это бывает в том случае, когда движущая сила является абсолютной.

Примечание 2

252. После того как мы достаточно изложили вопрос о прямолинейном движении, которое возни-

кает под влиянием постоянных сил, надо перейти к силам непостоянным, которые в разных местах на тело оказывают разные усилия, и изложить, каким образом изменяются ими движения тел. При этом движение и здесь мы берем прямолинейное.

Собственно говоря, все силы, которые мы наблюдаем в природе, переменны, и нельзя найти ни одной силы, которая во всех местах на тело действовала бы одинаково. Так, чем ближе планеты к Солнцу, тем сильнее они притягиваются Солнцем, и чем больше тело удаляется от поверхности Земли, тем меньше в нем становится тяжесть или стремление упасть вниз. Это происходит приблизительно подобно тому, как магнит притягивает кусок железа на меньшем расстоянии сильнее, на большем же — слабее.

Мы исследуем теперь законы того, в какой зависимости силы находятся от расстояний или от положений тела, и законы, по которым изменяется движение тела под действием силы. И прежде всего мы рассмотрим силы, пропорциональные какой-либо степени расстояния тела от неподвижной точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16

253. *Центром сил называется та неподвижная точка, к которой тела притягиваются силой, которая зависит от расстояния от этой точки, т. е. силой, пропорциональной какой-нибудь функции от расстояния.*

Следствие 1

254. Можно найти то расстояние от этого центра сил, на котором тело притягивается к центру с силой, равной силе тяжести этого тела, когда оно находится на поверхности Земли.

Следствие 2

255. Если известно это расстояние и известен закон притяжения, т. е. известно, какой функции от расстояния пропорционально притяжение, то этим самым становится известным соотношение между стремлением где угодно расположенного тела приблизиться к центру сил и силой тяжести того же тела, когда оно находится на поверхности Земли.

Следствие 3

256. Так как таким образом можно сравнивать любые переменные силы с силой тяжести и так как действие последней на тела нам известно, то можно точно определить действие любой силы на тела.

Примечание 1

257. Я принимаю здесь притяжение центра сил подобным силе тяжести, так что стремления к центру различных тел, находящихся на определенном расстоянии от него, также пропорциональны их массам, а следовательно, ускорительные силы всех их равны (§ 212). При обсуждении этих вопросов, таким образом, не надо принимать в расчет массы тела, а достаточно одной ускорительной силы, кото-

рая пропорциональна стремлению приблизиться к центру, разделенному на массу. Она будет сравниваться с ускорительной силой тяжести, которую мы принимаем за единицу, и к этой единице мы будем приводить все другие ускорительные силы как однородные с ней величины.

Следствие 4

258. Если, таким образом, мы скажем, что силы пропорциональны расстоянию от центра сил или какой-либо функции его, то это нужно понимать не только по отношению к одним стремлениям, которые имеют тела к центру, но и по отношению к ускорительным силам, т. е. к стремлениям, деленным на массы тел.

Следствие 5

259. Итак, в виду того, что сила, действующая на тело, всегда направлена к центру сил, ясно, что тело, поскольку оно может находиться или в покое или в движении, направление которого проходит через центр сил, может двигаться только по прямой проходящей через центр сил (§ 189).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17

260. *Сила, которая толкает тела к подобного рода центру сил, называется центростремительной силой; если же эта сила отрицательна, так что она отталкивает тела от центра, то она называется силой центробежной* [38].

Следствие 1

261. Так как тут идет речь о движении, то центростремительная сила будет для нас ускорительной силой, т. е. это будет стремление тела к центру деленное на массу тела.

Следствие 2

262. Итак, стремление или напряжение, которое тело имеет по направлению к центру сил, выражается произведением центростремительной силы на массу тела. Поэтому оно так относится к весу тела, когда оно находится на поверхности Земли, как центростремительная сила, или ускорительная сила, к единице (§ 257).

Примечание

263. Ньютон, который особенно часто пользуется термином „центростремительная сила", замечает, что ее можно измерять тремя способами.

Во-первых, ее абсолютной величиной, которой он измеряет действенность самого центра сил, безотносительно к притягиваемым телам; так, говорит он в большем магните заключается большая абсолютная величина центростремительной силы, в меньшем — меньшая. И подобным образом, по его теории, в Солнце больше эта абсолютная величина, чем в Земле. Это сравнение, однако, применимо лишь к центрам сил, притягивающим по одинаковому закону, т. е. согласно одной и той же функции расстояния; к притягивающим же по различным законам подобного рода сравнение не имеет смысла. Значит, эту абсолютную величину важно определять, исходя из стремления, которое имеет данное тело на данном расстоянии по направлению к центру сил. В данном случае я ввожу то расстояние, на котором тело стремится к центру с силой, равной его весу (§ 254).

Во-вторых, Ньютон указывает ускорительную величину центростремительной силы, которую он признает в том же смысле, какой имеет здесь сама центростремительная сила (§ 261): она измеряется стремлением, деленным на массу.

В третьих, он вводит движущую величину центростремительной силы, чем обозначается именно это самое стремление, которое имеют тела, стремясь приблизиться к центру сил; ведь количество движения, возникшее за определенное время, которое обычно измеряют скоростью, умноженной на массу, пропорционально этому самому стремлению. Так, обозначив это стремление через p, массу — через A, мы получим, что приращение скорости за данный промежуток времени пропорционально $\frac{p}{A}$ (§ 154); будучи умножено на массу A, оно дает приращение количества движения, которое, таким образом, пропорционально самому p.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 32

Задача

264. *Центр сил C* (рис. 25) *притягивает к себе тела с силой, пропорциональной какой-нибудь сте-*

пени расстояния. Тело, находящееся в покое в A, под действием этой силы приходит в движение. Найти скорость тела в любой точке пути AC.

Решение

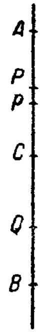
Рис. 25.

Пусть $AC = a$, $AP = x$, а скорости, которая будет в P, пусть будет соответствовать высота v. Пусть производится притяжение, пропорциональное n-й степени расстояния, и пусть f обозначает то расстояние от C, на котором стремление тела к C равно весу тела, когда оно находится на поверхности Земли. Таким образом ускорительная сила, с которой тело в P стремится к C, будет относиться к силе тяжести, которую я принимаю за единицу, как CP^n к 1, т. е. как $(a-x)^n$ к f^n; поэтому она выразится через $\frac{(a-x)^n}{f^n}$. Обозначив Pp через dx, мы будем иметь

$$dv = \frac{(a-x)^n\,dx}{f^n};$$

ведь dv равно dx, умноженному на ускорительную силу (§ 213). Интегрируя это уравнение, мы получим:

$$v = C - \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)\,f^n}.$$

Для определения константы C положим $x = 0$; в этом случае по предположению должно получиться $v=0$; таким образом получится

$$C=\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Поэтому мы будем иметь

$$v=\frac{a^{n+1}-(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n},$$

или, приняв $a-x=CP=y$, мы будем иметь

$$v=\frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Из этого уравнения мы узнаем скорость тела в любом месте пути AC. Ч.и Т. Н.

Следствие 1

265. Если $n+1$ — число положительное, то y^{n+1} при $y=0$ обращается в нуль. Таким образом в этом случае соответствующая высота для скорости, которой тело будет обладать, достигнув C, будет равна

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}.$$

Но если $n+1$ является число мотрицательным, то y^{n+1} при $y=0$ станет бесконечно большим, и, таким образом, в этом случае скорость тела, попадающего в C, будет бесконечно большая.

Следствие 2

266. Если же $n+1=0$, т. е. если $n=-1$, то из полученного равенства нельзя определить значе-

ние v, так как числитель и знаменатель обращаются в нуль. Поэтому данный случай надо выводить из самого диференциального уравнения. В этом случае

$$dv = \frac{f\,dx}{a-x}$$

и после интегрирования

$$v = C - f\ln(a-x).$$

Но C должно быть равным $f\ln a$, вследствие чего получится:

$$v = f\ln\frac{a}{a-x} = f\ln\frac{a}{y}.$$

Это и есть истинное значение v, когда $n=-1$, т. е. когда центростремительная сила обратно пропорциональна расстоянию от центра сил.

Следствие 3

267. В этом случае, при $n=-1$, когда тело попадает в центр C, его скорость будет бесконечно велика; ведь тогда получается $v = f\ln\infty$. Это — самая низшая ступень бесконечных и как бы ближайшая к конечному; ведь на какую бы малую величину $n+1$ ни отошло от нуля, скорость в C тотчас же становится конечной.

Следствие 4

268. Положим, $n+1$ — число положительное. Так как высота, соответствующая скорости в C, равняется

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n},$$

то сами скорости тел в центре C будут пропорциональны

$$a^{\frac{n+1}{2}},$$

т. е. пропорциональны $\frac{n+1}{2}$-й степени расстояния, с которого они начали падение.

Примечание 1

269. После того как тело из A попадет в C, не так-то легко определить, как оно будет двигаться дальше. Правда, можно думать, что если в найденном выражении мы положим y отрицательным, то получится высота, соответствующая скорости в Q и если это будет величина положительная, то тело, наверное, попадет в Q; если же она отрицательна, то это будет указанием на то, что тело никогда не перейдет за Q в сторону CQ. Однако этот метод продолжения движения не всегда может быть применен; часто он противоречит предположению, по которому принимается, что притягательная сила по направлению к центру по ту и по другую сторону C одинакова. Ведь тело, находящееся в P, притягивается вниз; когда же оно попадает в Q, то его будет толкать равная сила вверх, если $CQ = CP$. Поэтому сила, воздействие которой тело испытывает в Q, становится отрицательной по отношению к первой и потому должна быть выражена отрицательной величиной. Поэтому сила в P, выраженная через

$\frac{(a-x)}{f^n}$ или $\frac{y^n}{f^n}$, должна сделаться отрицательной, если положить $-y$ вместо y, а это возможно только тогда, когда n или число нечетное или дробь, числитель и знаменатель которой числа нечетные. В этих случаях получится истинное значение v, если тело попадет в Q; во всех же остальных случаях получается величина v, не соответствующая истине, так как вычисленная сила, действующая на тело в Q, не совпадает с ее настоящим значением. В самом деле, если n число четное, то притягивающая сила в Q при y отрицательном равна силе в P и тянет в ту же сторону, т. е. вниз. Это значит, что тело, прошедшее через центр C, должно опускаться по прямой CQ дальше, до бесконечности, что ясно показывает вычисление. Так как это противоречит предположению, то ясно, что в этих случаях определить движение тела, когда оно попадет в C, по найденной формуле нельзя.

Еще более очевиден абсурд, когда $n=\frac{1}{2}$ или другой подобного рода дроби, которая при подстановке $-y$ вместо y превращает y^n в величину мнимую.

Это обозначало бы, что тело, прошедшее через C, не только не испытывает притяжения к C, но что, кроме того, сила притяжения становится мнимой, — а что это такое, этого никто даже понять не может.

Следствие 5

270. Если n число нечетное, то значение v, которое равно

$$\frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)f^n},$$

не изменится, если подставить $-y$ вместо y, так как тогда $n+1$, показатель степени при y, становится числом четным. Из этого ясно, что скорость тела в Q будет равна той, которую тело имеет в P, если только $CQ = CP$. Значит, тело идет в направлении CQ, уходя от центра, таким же образом, как оно шло раньше по AC, приближаясь к центру; тело дойдет до B, причем $CB = AC$, и здесь потеряет всю свою скорость. Подобным же образом оно пойдет назад к C и вновь дойдет до A. И эти колебательные движения оно будет совершать вечно, если только нет сопротивления.

Следствие 6

271. Однако надо исключить тот случай, когда $n = -1$, хотя -1 и является числом нечетным. Положив y отрицательным, мы получим

$$v = f \ln\left(-\frac{a}{y}\right),$$

а это есть мнимое число. Из этого можно сделать заключение, что тело никогда не перейдет через C.

Но, повидимому, нужно вывести другое заключение, если n есть число отрицательное, хотя бы и нечетное. Соответствующий пример подобного рода нам встретится ниже для $n = -3$ (§ 335).

Примечание 2

272. Повидимому, все это не вполне совпадает с истиной; ведь едва ли есть основание, почему тело под влиянием своей бесконечно большой скорости, которую оно приобрело в C, пойдет в другую сторону скорее, чем по направлению CB, — особенно когда направление этой бесконечно большой скорости идет как раз в эту сторону. Но что бы там ни было, тут нужно доверять больше вычислению, чем нашему суждению, и надо определенно сказать, что мы еще основательно не понимаем, как происходит скачок от бесконечного к конечному. В этом мнении мы еще больше утверждаемся на примере, который встретится нам ниже (§ 655) и который нам придется подробно разъяснить для $n = -2$. В этом случае скорость тела, достигшего C, тоже является бесконечной и направленной по CB; но тем не менее тело не проходит дальше за C, а внезапно возвращается из C и так же, как оно шло от A к C.

Из этого ясно, что всякий раз как скорость в C является бесконечно большой, вопрос о дальнейшем продвижении надо оставлять под сомнением. Однако это будет только до тех пор, пока мы не перейдем к движениям криволинейным, так как из этих последних можно будет вывести более ясное заключение о движениях прямолинейных (§ 762). В том неудобстве, а именно в том, что получается расхождение с предположением, повинен не расчет, который мы там приведем. Там центростремительная сила будет принята одинаковой в любую сторону, и никакого противоречия с вычислением не получится.

Примечание 3

273. Во всех тех случаях, когда скорость в C не является бесконечно большой, — а это происходит всякий раз, когда $n+1$ является числом положительным, — все движение тела мы можем постичь нашим разумением, хотя бы даже расчет был и недостаточным. Ведь если скорость в C конечна и имеет направление по CB, которое она необходимо должна будет иметь, то не может быть, чтобы она не продолжала своего движения по CB. Продолжая это движение, тело будет уходить от C таким же образом, как раньше оно приближалось по AC, и в какой-нибудь точке Q тело будет иметь ту же скорость, которую оно раньше имело в точке, расположенной по другую сторону от C на таком же расстоянии, — как это можно понять из § 251. Таким образом тело будет вечно совершать колебательные движения из A в B и обратно из B в A.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 33

Задача

274. *Центр C* (рис. 26) *притягивает с силой, пропорциональной какой-нибудь степени расстояния, и тело имеет в D уже данную скорость. Найти точку A на продолжении прямой CD, из которой тело, начиная свое падение к C и придя в точку D, приобретет эту заданную скорость.*

Решение

Обозначим, как раньше, показатель степени через n; расстояние, на котором центростремительная сила равна силе тяжести, через f; и пусть, далее, $CD = b$; высота, соответствующая скорости в D, пусть равняется h, а искомое расстояние CA положим равным q. Так как это q обозначает то же самое, что выше a, b — то же, что y, и h то же, что там было v, то мы будем иметь следующее равенство

$$h = \frac{q^{n+1} - b^{n+1}}{(n+1) f^n}.$$

Рис. 26.

Из него получается

$$q^{n+1} = b^{n+1} + (n+1) hf^n$$

и

$$q = [b^{n+1} + (n+1) hf^n]^{\frac{1}{n+1}}.$$

В частном же случае, когда $n = -1$, мы будем иметь

$$h = f \ln \frac{q}{b},$$

а отсюда

$$q = e^{\frac{h}{f}} b,$$

где e есть число, логарифм которого единица. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

275. Если центростремительная сила прямо пропорциональна расстоянию, то n будет равно единице, и тогда мы получаем

$$q = \sqrt{b^2 + 2fh}.$$

Эта величина всегда конечна, если только конечны b, f и h.

То же получается, если $n+1$ является числом положительным. Но и в случае $n=-1$ расстояние q никогда не становится бесконечным.

Следствие 2

276. Но пусть $n+1$ будет числом отрицательным, равным $-m$, так что

$$n=-m-1.$$

Тогда мы будем иметь

$$q=b\sqrt[m]{\frac{f^{m+1}}{f^{m+1}-mb^m h}}.$$

При

$$h=\frac{f^{m+1}}{mb^m}$$

эта высота обращается в бесконечность. Но если дальше h делается еще больше, то q становится отрицательным или, еще хуже, — мнимым. Отсюда следует, что в этих случаях, если бы тело падало даже из бесконечно большого расстояния, оно не могло бы приобрести столь большой скорости в D.

Следствие 3

277. Если $n+1$ остается числом отрицательным, т. е. $-m$, и точка A отстоит бесконечно далеко, то мы будем иметь

$$h=\frac{f^{m+1}}{mb^m},$$

а расстояние от центра C, на котором тело, падая из бесконечного пространства, имеет скорость $\sqrt{h}$, будет равно

$$f\sqrt[m]{\frac{f}{mh}}.$$

Следствие 4

278. Если центростремительная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния, то $m=1$. При этих условиях

$$q=\frac{bf^2}{f^2-bh}.$$

Если, следовательно,

$$h=\frac{f^2}{b},$$

то расстояние AC, т. е. q, становится бесконечно большим.

Следствие 5

279. Если эту задачу соединить с предыдущей, то определится движение тела, которое, падая из D в C, начинает его со скоростью $\sqrt{h}$. Из предыдущего известно движение вниз тела, начинающееся из A, и начальная часть этого движения вниз из D со скоростью $\sqrt{h}$. Обозначим CP через y и высоту, соответствующую скорости тела в P, обозначим через v. Тогда мы получим

$$v=\frac{q^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$$

(§ 264). Но ведь

$$q^{n+1} = b^{n+1} + (n+1)\,hf^n.$$

Отсюда получается:

$$v = \frac{b^{n+1} + (n+1)\,hf^n - y^{n+1}}{(n+1)\,f^n} = \frac{b^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)\,f^n} + h.$$

Следствие 6

280. Это выражение для v, если падение из D начинается со скоростью, соответствующей высоте h, ничем не отличается от того, которое получается, если падение происходит из состояния покоя, кроме одного, а именно, что оно будет везде больше на эту самую величину h.

Примечание

281. Что касается промежутков времени, в течение которых при любом законе центростремительной силы будет пройден путь AC (рис. 25) и его части, то их легко определить, зная скорости. При общем значении буквы n время не может быть выражено в конечном виде, так как время прохождения пути AP получается равным

$$\int \frac{dx\sqrt{(n+1)\,f^n}}{\sqrt{a^{n+1} - (a-x)^{n+1}}},$$

а это выражение в общем случае не может быть ни интегрировано, ни сведено к квадратуре известных кривых. Однако при некоторых частных значениях n

этот интеграл можно при достаточном искусстве вычислить.

Поэтому, оставив в стороне общие случаи, мы рассмотрим в следующих предложениях наиболее выдающиеся частные случаи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 34

Задача

282. *Центростремительная сила пропорциональна расстоянию от центра* C (рис. 27); *тело падает от* A *до* C. *Определить время, в течение которого тело пройдет какую-либо часть этого пути.*

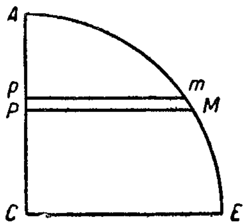

Рис. 27

Решение

Положим, что $AC = a$, и положим, что расстояние от центра C, на котором центростремительная сила равна силе тяжести, равно f; обозначим какой-либо отрезок CP через y, и пусть скорость в P соответствует высоте v.

Время, в течение которого описывается путь CP, равно

$$\int \frac{dy}{\sqrt{v}}.$$

Я здесь опускаю дробь $\frac{1}{250}$, которая имеет значение для того, чтобы это время выразить в секундах: ее можно будет присоединить когда угодно.

На основании предложения 32 (§ 264) при $n = 1$ мы будем иметь

$$v = \frac{a^2 - y^2}{2f},$$

откуда

$$\sqrt{v} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{2f}}.$$

Таким образом время, затрачиваемое на путь PC, будет равно

$$\int \frac{dy\sqrt{2f}}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \frac{\sqrt{2f}}{a} \int \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Построим на AC квадрант AME круга и проведем ординаты CE и PM. Тогда, очевидно, дуга EM будет равна

$$\int \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Поэтому время, затрачиваемое на путь PC, будет равно

$$\frac{EM \cdot \sqrt{2f}}{a}.$$

Время же всего падения по AC будет равно

$$\frac{AME \cdot \sqrt{2f}}{a}.$$

Следовательно, время падения по AP равно

$$\frac{AM \cdot \sqrt{2f}}{a}.$$

Таким образом можно определить время падения по любой части пройденного пути; при этом оно будет выражено в секундах, если полученное выражение разделить на 250 и если длина f будет выражена в тысячных долях рейнского фута. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

283. Если $1:\pi$ обозначает отношение диаметра к окружности [39], то

$$2AME : a = \pi : 1$$

и

$$\frac{AME}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому время падения по AC равно $\frac{\pi}{2}\sqrt{2f}$.

Это выражение не зависит от высоты a падения; напротив, какова бы ни была величина a, время не изменит своего значения. Итак, все тела, которые стремятся к этому центру, достигнут его через одинаковые промежутки времени [40].

Примечание

284. Равенство этих промежутков времени является следствием выражения скорости

$$\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{2f}},$$

где надо считать, что a и y имеют одно измерение. И всякий раз, как имеет место это выражение, любые расстояния a будут требовать для своего прохождения одинаковых промежутков времени (§ 46).

Следствие 2

285. Если, кроме того, есть еще другой такого же рода центр сил, но обладающий другой, отличной действенностью, — так что расстояние, на котором центростремительная сила равна тяжести, будет равно F, то время падения к одному центру будет относиться ко времени падения к другому центру, как $\sqrt{f}$ к $\sqrt{F}$. С другой стороны, сама действенность того и другого центра в этом случае будет обратно пропорциональна расстояниям f и F, так как действенность должна быть пропорциональна силам, с которыми действуют эти центры на равных расстояниях. Следовательно, время падения к различным центрам этого рода сил будет обратно пропорционально квадратному корню из действенности этих центров.

Как будет показано в дальнейшем, такая пропорциональность имеет место при всех подобного рода центрах сил, если пройденные пути равны между собой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 35

Задача

286. *Центростремительная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра C* (рис. 28). *Тело падает от A до C. Найти время, в течение которого тело пройдет какую-либо часть этого пути AC.*

Решение

Пусть попрежнему $AC = a$; расстояние, на котором центростремительная сила равна тяжести, равно f; далее, пусть $CP = y$ и скорость в P соответствует высоте v.

При $n = -2$, по предложению 32 (§ 264), мы будем иметь:

$$v = f^2\left(\frac{a-y}{ay}\right)$$

и

$$\sqrt{v} = f\sqrt{\frac{a-y}{ay}}.$$

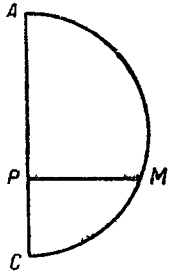

Рис. 28.

Таким образом элемент времени $\frac{dy}{\sqrt{v}}$ теперь равен

$$\frac{dy\sqrt{ay}}{f\sqrt{a-y}} = \frac{\sqrt{a}}{f} \cdot \frac{y\,dy}{\sqrt{ay-y^2}}.$$

Следовательно, время, затрачиваемое на путь PC, равно

$$\frac{\sqrt{a}}{f}\int\frac{y\,dy}{\sqrt{ay-y^2}}.$$

Но

$$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{ay-y^2}} = -\sqrt{ay-y^2} + \int\frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{ay-y^2}}.$$

Поэтому, описав на AC полукруг AMC и проведя ординату PM, мы будем иметь:

$$CM = \int\frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{ay-y^2}} \quad \text{и} \quad PM = \sqrt{ay-y^2}.$$

Вследствие этого время, затрачиваемое на CP, будет равно

$$\frac{\sqrt{a}}{f}(CM - PM),$$

а потому время всего падения по AC равно $\frac{AMC \cdot \sqrt{a}}{f}$.

В результате мы получаем, что время, в течение которого проходится часть AP, равно $\frac{\sqrt{a}}{f}(AM + PM)$. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

287. Обозначив через $1:\pi$ отношение диаметра к окружности, мы будем иметь:

$$AMC = \frac{1}{2}a\pi.$$

Поэтому время падения по AC будет равняться

$$\frac{\pi a \sqrt{a}}{2f}.$$

Из этого ясно, что время падения различных тел, падающих к C, пропорционально полуторной степени от расстояний.

Следствие 2

288. К различным подобного рода центрам сил тела приближаются в течение промежутков времени, которые прямо пропорциональны полуторной степени от расстояний и обратно пропорциональны квадрат-

ному корню из действенности. Действенность же прямо пропорциональна квадрату расстояния f.

Примечание

289. Если центростремительная сила обратно пропорциональна кубу расстояния, то $n = -3$ и

$$v = \frac{f^3}{2}\left(\frac{a^2 - y^2}{a^2 y^2}\right).$$

Таким образом

$$\sqrt{v} = \frac{f}{ay}\sqrt{f\frac{a^2 - y^2}{2}},$$

и время, затрачиваемое на CP, равно

$$\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}\int\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}\left(a - \sqrt{a^2 - y^2}\right).$$

Из квадранта круга мы имеем

$$PM = \sqrt{a^2 - y^2};$$

следовательно, время, в течение которого проходится CP, равно

$$\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}(AC - PM);$$

время же, в течение которого проходится весь путь AC, равно

$$\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}AC \quad \text{или} \quad \frac{a^2\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}.$$

Вследствие этого, время, в течение которого проходится часть AP, будет равно

$$\frac{AC \cdot PM\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}.$$

В этом случае время может быть выражено алгебраически, что происходит также и в тех случаях, когда n является одним из чисел следующего ряда:

$$-\frac{5}{3}, \quad -\frac{7}{5}, \quad -\frac{9}{7}, \quad -\frac{11}{9} \text{ и т. д.}$$

Теперь мы хотим приступить к исследованию, каковы должны быть те полные промежутки времени, которые затрачиваются на падение по AC.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 36

Задача

290. *Определить время падения по AC к центру сил C* (рис. 28), *если центростремительная сила обратно пропорциональна такой степени расстояния, показатель которой равен $\frac{2m+1}{2m-1}$, где m обозначает целое положительное число.*

Решение

Пусть a, f, y и v сохраняют прежнее значение и

$$n = \frac{-2m-1}{2m-1}.$$

В этом случае

$$v = \frac{2m-1}{2} f^{\frac{2m+1}{2m-1}} \left(\frac{a^{\frac{2}{2m-1}} - y^{\frac{2}{2m-1}}}{a^{\frac{2}{2m-1}} \quad y^{\frac{2}{2m-1}}} \right).$$

и следовательно,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{v}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2a^{\frac{2}{2m-1}}}{(2m-1) f^{\frac{2m+1}{2m-1}}}} \int \frac{y^{\frac{1}{2m-1}} dy}{\sqrt{a^{\frac{2}{2m-1}} - y^{\frac{2}{2m-1}}}}.$$

Нужно учесть, что этот интеграл при $y=0$ обращается в нуль. При $y=a$ мы получим искомое время всего падения по AC.

Если положить

$$y^{\frac{2}{2m-1}} = z$$

и

$$a^{\frac{2}{2m-1}} = b,$$

то мы будем иметь

$$y^{\frac{1}{2m-1}} = \sqrt{z}$$

и

$$dy = \frac{2m-1}{2} z^{\frac{2m-3}{2}} dz.$$

Если подставить эти величины, то мы получим

$$\int \frac{dy}{\sqrt{v}} = \sqrt{\frac{(2m-1)\, a^{\frac{2}{2m-1}}}{2f^{\frac{2m+1}{2m-1}}}} \int \frac{z^{m-1}\, dz}{\sqrt{b-z}}.$$

Для того чтобы найти

$$\int \frac{z^{m-1}\, dz}{\sqrt{b-z}},$$

я полагаю

$$b - z = u^2.$$

Тогда мы получим

$$z = b - u^2,$$

$$dz = -2u\,du$$

и, следовательно,

$$\frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt{b-z}} = -2\,du\,(b-u^2)^{m-1} =$$

$$= -2\,du\left[b^{m-1} - \frac{(m-1)}{1}\,b^{m-2}u^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\,b^{m-3}u^4 - \text{и т. д.}\right].$$

Интеграл этого выражения равен

$$C - 2u\left[b^{m-1} - \frac{(m-1)}{1\cdot 3}\,b^{m-2}u^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 5}\,b^{m-3}u^4 - \text{и т. д.}\right].$$

Так как эта величина при

$$y \quad \text{или} \quad z = 0,$$

т. е. при

$$u^2 = b,$$

должна обратиться в нуль, то мы получим

$$C = 2b^{m-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{(m-1)}{1\cdot 3} + \right.$$

$$\left. + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 5} - \text{и т. д.}\right].$$

Так как полное время падения получится при

$$y = a \quad \text{или при} \quad z = b,$$

т. е. при

$$u = 0,$$

то от интеграла выражения

$$\frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt{b-z}}$$

останется одна постоянная величина C, которая, если на место $b^{m-\frac{1}{2}}$ снова поставить a, будет иметь вид:

$$2a\left[1 - \frac{(m-1)}{1\cdot 3} + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 5} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7} + \text{и т. д.}\right].$$

Итак, полное время падения по AC будет равно произведению

$$\frac{a^{\frac{2m}{2m-1}}}{f^{\frac{2m}{2m-1}}}\, 2\sqrt{(2m-1)f}$$

на следующий ряд:

$$1 - \frac{(m-1)}{1\cdot 3} + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 5} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7} + \text{и т. д.},$$

который, очевидно, оборвется, поскольку m является числом целым и положительным.

Поэтому-то в этих случаях время и может быть выражено алгебраически. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

291. Пусть $m=1$; в этом случае $n=-3$, и ряд обратится в единицу; значит, время падения по AC будет равно

$$\frac{a^2}{f^2}\sqrt{2f}=\frac{a^2\sqrt{2}}{f\sqrt{f}},$$

как и было найдено выше (§ 289).

Следствие 2

292. Если $m=2$, т. е. если $n=-\frac{5}{3}$, то ряд делается равным $\frac{2}{3}$, и время всего падения будет равно

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{a^{\frac{4}{3}}}{f^{\frac{4}{3}}}\sqrt{6f}.$$

Если, далее, $m=3$, то n будет равно $-\frac{7}{5}$, ряд равен $\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}$ и время будет равно

$$\frac{2\cdot 4\cdot a^{\frac{6}{5}}}{3\cdot 5\cdot f^{\frac{6}{5}}}\sqrt{10f}.$$

Подобным же образом, если $m=4$, то n становится равным $-\frac{9}{7}$, и время получается равным

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot a^{\frac{8}{7}}}{3\cdot 5\cdot 7\cdot f^{\frac{8}{7}}}\sqrt{14f}.$$

Следствие 3

293. Отсюда можно вывести общее значение ряда, равное

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2m-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2m-1)}.$$

Время же падения в общей форме будет равно

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2m-2) \cdot a^{\frac{2m}{2m-1}}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2m-1) \cdot f^{\frac{2m}{2m-1}}} \sqrt{2(2m-1)f}\,.$$

При этом

$$n = \frac{-2m-1}{2m-1}$$

или

$$m = \frac{n-1}{2n+2}.$$

Следствие 4

294. Если на место m последовательно подставлять числа 1, 2, 3, 4 и т. д., то соответствующие значения ряда будут составлять последовательность чисел

$$1,\quad \frac{2}{3},\quad \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5},\quad \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \text{ и т. д.}$$

Если допустить квадратуру круга, то можно на место m подставлять и промежуточные значения. Так, если $m = \frac{1}{2}$, то ряд получается равным $\frac{\pi}{2}$, если через $1:\pi$ обозначить отношение диаметра к окружности. При $m = \frac{3}{2}$ соответственная величина будет $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ и так далее; если m принимает значения $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$ и т. д., то эти величины будут равны

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot \pi}{2 \cdot 4 \cdot 2}, \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2}, \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 2} \text{ и т. д.}$$ [41].

Следствие 5

295. Значит, и в этих случаях время падения по AC будет точно известно. В самом деле, если $m = \frac{1}{2}$, то $n = -\infty$, и в этом случае время всегда будет бесконечно малым. Если же $m = \frac{3}{2}$, то $n = -2$, и время падения будет равно

$$\frac{1 \cdot \pi}{2 \cdot 2} \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}}{f^{\frac{3}{2}}} \sqrt{4f} = \frac{\pi \cdot a \sqrt{a}}{2f},$$

как это мы уже нашли выше (§ 287).

Если $m = \frac{5}{2}$, то $n = -\frac{3}{2}$, и время падения будет равно

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot \pi a^{\frac{5}{4}}}{2 \cdot 4 \cdot f^{\frac{5}{4}}} \sqrt{2f}.$$

Если же $m = \frac{7}{2}$, то $n = -\frac{4}{3}$ и время падения будет равно

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \pi a^{\frac{7}{6}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot f^{\frac{7}{6}}} \sqrt{3f}.$$

Следствие 6

296. В общей форме, если

$$m = \frac{2k+1}{2},$$

(а в этом случае n становится равным $\frac{-k-1}{k}$), время падения будет равно

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k} \cdot \frac{\pi a^{\frac{2k+1}{2k}}}{f^{\frac{2k+1}{2k}}} \sqrt{kf}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 37

Задача

297. *Определить время падения по AC* (рис. 28) *к центру сил C, если центростремительная сила обратно пропорциональна такой степени расстояния, показатель которой равен* $\frac{m-1}{m}$, *где* m *есть любое целое положительное число.*

Решение

В этом случае

$$n = \frac{1-m}{m},$$

и поэтому

$$v = \frac{a^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{m} f^{\frac{1-m}{m}}} = mf^{\frac{m-1}{m}} \left(a^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}\right).$$

Отсюда элемент времени, равный $\frac{dy}{\sqrt{v}}$, будет иметь вид:

$$\frac{dy}{\sqrt{mf^{\frac{m-1}{m}}\left(a^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}\right)}},$$

и время, затрачиваемое на PC, будет равно

$$\frac{1}{\sqrt{mf^{\frac{m-1}{m}}}} \int \frac{dy}{\sqrt{a^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}}}.$$

Положим

$$a^{\frac{1}{m}} = b \quad \text{и} \quad y^{\frac{1}{m}} = z.$$

Тогда мы будем иметь

$$dy = mz^{m-1}\,dz.$$

Следовательно, время, затрачиваемое на PC, будет иметь вид:

$$\sqrt{mf^{\frac{1-m}{m}}} \int \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt{b-z}}.$$

Интеграл выражения

$$\frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt{b-z}},$$

так же, как мы нашли это в предыдущем предложении, имеет вид:

$$2b^{\frac{2m-1}{2}}\left[1-\frac{(m-1)}{1\cdot 3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 5}-\right.$$
$$\left.-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7}+\text{и т. д.}\right].$$

Полное время падения по AC мы получим, подставив $a^{\frac{2m-1}{2m}}$ вместо $b^{\frac{2m-1}{2}}$. Оно будет равно

$$2\sqrt{ma^{\frac{2m-1}{m}}f^{\frac{1-m}{m}}},$$

умноженному на следующий ряд:

$$1-\frac{(m-1)}{1\cdot 3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 5}-$$
$$-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7}+\text{и т. д.}$$

Поскольку m число целое положительное, постольку ряд оборвется, так что искомое время выразится алгебраически. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

298. Если $m=1$, то $n=0$, и центростремительная сила становится постоянной и равной тяжести.

В этом случае ряд будет равен единице и время падения по AC будет равно $2\sqrt{a}$, как это и было уже найдено в § 219, исключая только то, что здесь не принята во внимание бывшая там буква m.

Следствие 2

299. Если $m=2$, так что $n=-\frac{1}{2}$, то время всего падения будет равняться

$$\frac{2}{3}2a^{\frac{3}{4}}f^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2}.$$

Если $m=3$, то $n=-\frac{2}{3}$, и полное время падения будет равно

$$\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}2a^{\frac{5}{6}}f^{-\frac{1}{3}}\sqrt{3}.$$

Подобным же образом, если $m=4$ и потому $n=$ $=-\frac{3}{4}$, время падения будет равняться

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}2a^{\frac{7}{8}}f^{-\frac{3}{8}}\sqrt{4} \quad \text{и т. д.}$$

Следствие 3

300. Вообще, при всяком m

$$n=\frac{1-m}{m},$$

и время всего падения по AC будет иметь:

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2m-2)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2m-1)}2a^{\frac{2m-1}{2m}}f^{\frac{1-m}{2m}}\sqrt{m}.$$

Следствие 4

301. Если подставить, как и раньше (§ 294), те же промежуточные значения, можно определить время падения и для тех случаев, когда m есть любое целое положительное число $+\frac{1}{2}$. Если $m=\frac{1}{2}$, — а в этом случае $n=1$, — то время падения будет равно

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{2f},$$

совершенно так же, как в § 283, где был разобран случай, когда $n=1$, т. е. когда центростремительная сила пропорциональна расстоянию.

Следствие 5

302. Если $m=\frac{3}{2}$, т. е. если $n=-\frac{1}{3}$, то время падения становится равным

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{6a^{\frac{4}{3}}f^{-\frac{1}{3}}}.$$

Если $m=\frac{5}{2}$, т. е. если $n=-\frac{3}{5}$, то время падения равно

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{10a^{\frac{8}{5}}f^{-\frac{3}{5}}}.$$

В общем случае, когда

$$n=\frac{1-m}{m},$$

время падения мы находим равным

$$\frac{1\cdot 3\ldots(2m-1)}{2\cdot 4\ldots(2m-2)}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{4ma^{\frac{2m-1}{m}}f^{\frac{1-m}{m}}}.$$

Примечание

303. Из всего этого становится понятным, в каких случаях время падения может быть выражено алгебраически. Это возможно, если

$$n = \frac{-2m-1}{2m-1},$$

или же если

$$n = \frac{1-m}{m},$$

где m — любое целое положительное число. Кроме этих случаев, сомневаюсь, чтобы был приведен какой-либо другой.

Затем еще есть случаи, когда определение времени зависит от квадратуры круга; эти случаи будут иметь место, когда

$$n = \frac{-m-1}{m},$$

или

$$n = \frac{1-2m}{1+2m},$$

где m, как и выше, есть любое целое положительное число.

Правда, это не все случаи, которые сводятся к квадратуре круга; а именно, особый случай, когда $n = -1$, тоже зависит от квадратуры круга, как это мы покажем в следующем предложении. Но этот случай отличается от вышеуказанного тем, что при нем в определении времени встречается не π, а $\sqrt{\pi}$ и, кроме того, все время падения содержит выражение

$\sqrt{\pi}$, в то время как время, затрачиваемое на любой неопределенный путь, может быть выражено квадратурами трансцендентных кривых.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 38

Теорема

304. *Если центростремительная сила обратно пропорциональна расстоянию от центра сил С* (рис. 28), *то время полного падения по АС равно*

$$\frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}},$$

где а обозначает путь АС, f — расстояние, на котором центростремительная сила равна тяжести, и $\pi:1$ есть отношение окружности к диаметру.

Доказательство

Так как в какой-либо точке P высота, соответствующая скорости, равна

$$f \ln \frac{a}{y}$$

(§ 266), то скорость будет равна

$$\sqrt{f \ln \frac{a}{y}},$$

а время, затрачиваемое на путь PC, будет равняться

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \int \frac{dy}{\sqrt{\ln \frac{a}{y}}}.$$

Этот интеграл при том условии, что он при

$$y = 0$$

обращается в нуль, даст истинное время, затрачиваемое на PC. Поэтому, если в этом выражении положить

$$y = a,$$

то получится все время падения по AC.

Если положить

$$y = az,$$

то мы получим

$$\frac{a}{\sqrt{f}} \int \frac{dz}{\sqrt{-\ln z}}.$$

В „Commentarii Academiae Scientiarum Petropol" за 1730 г. я показал, что величина

$$\int \frac{dz}{\sqrt{-\ln z}}$$

при $z = 1$, т. е. при $y = a$, представляет собой в ряде

1, 2, 6, 24 и т. д.

тот член, индекс которого равен $\frac{1}{2}$ и который, как я там же показал другим методом, равен $\sqrt{\pi}$ [42].

Отсюда становится понятным, что время полного падения по AC равняется

$$\frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}}.$$

Ч. и Т. Н.

Следствие

305. Если несколько тел с различных расстояний падают к одному и тому же центру C, то время их падения будет пропорционально расстоянию их от центра.

Примечание 1

306. В настоящем предложении я опустил дробь $\frac{1}{250}$, на которую надо умножить выражение времени, полученное путем интегрирования элемента пути, разделенного на квадратный корень из соответствующей данной скорости высоты (§ 222): ведь эта дробь служит для определения времени в секундах, если расстояния выражены в скрупулах. Я и в дальнейшем буду определять время подобным образом, если только не требуется выражать этого в секундах, для того чтобы избежать недоразумений. Ведь легко себе представить, что для нахождения числа секунд не требуется ничего другого, как найденные таким образом выражения времени разделить на 250, а длину выразить в скрупулах, как мы уже не раз это делали в наших расчетах.

Примечание 2

307. То, что интеграл от

$$\frac{dz}{\sqrt{-\ln z}}$$

при $z=1$ равен

$$\sqrt{\pi},$$

покажется, конечно, парадоксом. В самом деле, доказать это прямо совершенно невозможно; и сам я узнал это только a posteriori, как это можно видеть из вышеупомянутого сочинения.

Интегралы

$$\int \frac{dz}{\sqrt{-\ln z}}$$

и

$$\sqrt{2\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}},$$

если после интегрирования положить $z = 1$, дают одну и ту же величину, хотя подинтегральные выражения совсем не равны друг другу и даже не могут сравниваться друг с другом [43].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 39

Теорема

308. *Если центростремительная сила будет пропорциональна n-й степени от расстояния и если несколько тел с различных расстояний стремятся к одному и тому же центру, то время падения будет пропорционально степени расстояния, показатель которой равен* $\frac{1-n}{2}$.

Доказательство

Пусть расстояние какого-либо тела от центра C равно $AC = a$ и расстояние, на котором центростремительная сила равна тяжести, пусть будет равно f.

Тело находится в P, причем $CP = y$, и высота, соответствующая скорости в этом месте, будет равна

$$v = \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1) f^n}.$$

Время же, в которое проходится CP, будет равно

$$\sqrt{(n+1) f^n} \int \frac{dy}{\sqrt{a^{n+1} - y^{n+1}}}.$$

Хотя этот интеграл нельзя найти в общей форме, но его можно оценить следующим образом. Если считать dy первого измерения, то члены a и y войдут в него в измерении

$$\frac{1-n}{2}.$$

Если после интегрирования положить

$$y = a,$$

а в этом случае получается время всего падения, то такое измерение, т. е.

$$\frac{1-n}{2},$$

будет иметь только a. Поэтому интеграл будет кратным

$$a^{\frac{1-n}{2}}.$$

В самом деле, в нем другого множителя нет, кроме f и постоянных чисел, которые имеют определенное значение. Поэтому, как бы a ни изменялось, продолжительность различных падений будет пропорциональна

$$a^{\frac{1-n}{2}},$$

т. е. пропорциональна степени расстояния, показатель, которой равен

$$\frac{1-n}{2}.$$

Ч. и Т. Д.

Следствие 1

309. Следовательно, для того чтобы продолжительность всякого падения была одна и та же, нужно, чтобы $a^{\frac{1-n}{2}}$ была величиной постоянной, как бы a ни изменялось. А это будет иметь место в том случае, если $n = 1$, т. е. если центростремительная сила прямо пропорциональна расстоянию, как это мы уже видели (§ 283).

Следствие 2

310. Равным образом отсюда ясно, что если центростремительная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния, т. е. если $n = -2$, то продолжительность падения к центру пропорциональна расстоянию в степени $\frac{3}{2}$ (§ 287).

Следствие 3

311. Если есть несколько притягивающих по одному закону центров сил, но с различной действенностью, и если к этим центрам тела падают с

одинаковых расстояний, то время будет пропорционально $f^{\frac{n}{2}}$, так как a в данном случае будет величина постоянная, а f — переменная. Если действенность пропорциональна центростремительной силе на данном расстоянии, — скажем, на расстоянии единицы, — то отсюда f^n будет обратно пропорционально действенности, а время будет обратно пропорционально корню квадратному из действенности.

Следствие 4

312. Если к этим различным центрам сил тела падают с каких угодно расстояний, то время падения будет прямо пропорционально $\frac{1-n}{2}$-й степени расстояния и обратно пропорционально корню квадратному из действенности.

Примечание

313. Из того, что сказано о силах центростремительных, совершенно ясно видно, как следует находить движение тел, если на место силы центростремительной появляется сила центробежная, т. е. отталкивающая тело от центра. Все остается неизменным, как и в предыдущем, только вместо выражения центростремительной силы, которое имело вид $\frac{y^n}{f^n}$ (§ 264), нужно взять его же с обратным знаком.

Однако будет не лишним, я думаю, сказать об этого рода случаях несколько слов; тогда выяснятся некоторые основные законы, касающиеся движений, производимых силами, — законы, которые не могут быть выведены путем одних вычислений.

Эти замечания относятся к действию сил на тела покоящиеся, к которым не так хорошо подходит наше исчисление, так как здесь приращение скорости сравнительно с прежним считается бесконечно малым и, на самом деле, получается нечто абсурдное, если не допустить, что первый элемент пути проходится в бесконечно малый промежуток времени. Для объяснения этого обстоятельства я применяю ту аксиому, что тело, находящееся в самом отталкивающем центре сил, будет оставаться там вечно, если центробежная сила в этой самой точке будет бесконечно малой или равна нулю; а это имеет место в том случае, когда центробежная сила пропорциональна положительной степени расстояния.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 40

Задача

314. *Из центра сил C* (рис. 29), *отталкивающего от себя с силой, пропорциональной n-й степени расстояния, выходит тело по прямой CP. Каковы будут его скорость в каком-нибудь месте P и время, в которое будет пройден путь CP?*

Решение

Пусть будет f расстояние, на котором центробежная сила равна тяжести; обозначим CP через y, а высоту, соответствующую скорости в P, — через v. Тогда сила, действующая на тело в P, будет равна $\frac{y^n}{f^n}$, и поэтому

$$dv = \frac{y^n\,dy}{f^n}$$

(§ 213), так как тело движется ускоренно. Если мы предположим, что тело в C не имеет никакой скорости, то мы будем иметь

$$v = \frac{y^{n+1}}{(n+1)f^n}$$

при $n+1$ положительном; если же это число отрицательное, то v становится бесконечностью.

Рис. 29.

Отсюда получается и время, в которое проходится путь CP. Оно равно

$$\sqrt{(n+1)f^n}\int\frac{dy}{y^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{2}{1-n}\sqrt{(n+1)f^n y^{1-n}},$$

так как при $y=0$ и y^{1-n} обращается в нуль.

Если v будет бесконечно велико, то и время является бесконечным, так как в него войдет постоянная величина бесконечно большая. Это будет указывать на то, что тело никогда не выйдет из C.

Таким образом время будет равняться

$$\frac{2}{1-n}\sqrt{(n+1)f^n y^{1-n}}$$

всякий раз, как $1-n$ и $n+1$ будут числами положительными. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

315. Эти два числа, $1-n$ и $1+n$, будут положительными, если n заключается в пределах от -1 до $+1$. Если n меньше -1, то скорость становится везде бесконечной, а если n больше $+1$, то время будет бесконечным.

Следствие 2

316. Из самой природы вопроса получается, что сли n будет больше нуля, то тело никогда не выйдет из C (§ 313). Поэтому с необходимостью получается, что если n заключается между нулем и положительной единицей, то данное здесь вычисление, хотя оно и указывает конечное время, неверно.

Следствие 3

317. Но вычисление времени здесь вытекает из скоростей; значит, и по отношению к ним должен быть тот же абсурд всякий раз, когда n заключается между нулем и положительной единицей. Ведь скорости в данном случае не могут возникнуть, так как тело никогда не выйдет из C.

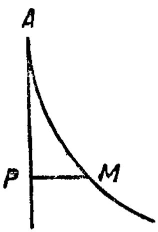

Рис. 30.

Примечание 1

318. Пусть AM будет такая кривая (рис. 30), что, взяв абсциссу $AP=y$, мы будем иметь ординату $PM=v$. Если n заключается в пределах между нулем и положитель-

ной единицей, то эта кривая будет иметь ту особенность, что она будет в A совпадать с осью и в этом месте будет иметь бесконечно большую кривизну, т. е. будет иметь радиус кривизны, равный нулю[44].

Следствие 4

319. Таким образом всякий раз, как кривая скоростей или, лучше, высот, соответствующих скоростям, будет иметь подобного рода форму, надо будет сказать, что она не могла быть произведена никакой силой, хотя бы вычисление показывало и другое. Этот случай является вполне мнимым и не существующим в природе вещей.

Примечание 2

320. Основание этого уклонения вычисления от природы, без сомнения, лежит в самом принципе движения, и в этом случае закон об увеличении скорости, производимом силами, — в других случаях общий, — здесь применяется неправильно.

Так как этот закон, как мы отметили выше (§ 313), имеет место только в том случае, когда тело имеет конечную скорость, то необдуманным является применять его в начале движения. Так как эта ошибка заключается только в самом первом элементе, то она по большей части является бесконечно малой, и поэтому на нее не обращают внимания. И действительно она является бесконечно малой всякий раз, как первый элемент пути проходится в бесконечно малый промежуточек времени; и тогда, конечно, ни в скоростях, ни во времени она не может произвести заметного расхождения. Другое дело, если сила, действующая на тело в самом начале пути, имеет конечную величину или даже бесконечно большую; тогда ясно, что в этом случае первый элемент проходится мгновенно [45].

Если, однако, как это и имеет место в рассматриваемом случае, сила вначале бесконечно мала, или лучше, равна нулю, то для прохождения только первого элемента пути нужно не только конечное, но и бесконечное время, так как тело, находящееся в покое и не подвергающееся действию никакой силы, никогда не сойдет со своего места.

В остальных случаях, где n больше не только нуля, но и единицы, ошибка уже столь велика, что даже вычисление для первого элемента пути дает бесконечное время.

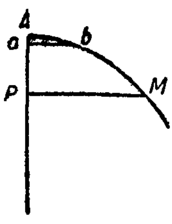

Рис. 31.

Если n находится в пределах от нуля до единицы, то ошибка вычисления делается понятной потому, что в этих случаях, очевидно, кривая сил имеет форму кривой AM (рис. 31), которая пересекает ось AP в точке A под прямым углом. Тотчас же, в ближайшей к A точке a, линия ab, выражающая силу, является бесконечно большой по отношению к отрезку Aa.

При вычислении движения в общем случае получается одно и то же, рассматривать ли так, что тело, проходящее элемент пути, получает воздействие со стороны силы в начале или же в конце элемента. В этом же случае очевидно, что если рассматривать, что тело на расстоянии всего элемента Aa получает воздействие со стороны силы ab, то должна возникнуть ошибка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 41

Задача

321. *Центростремительная сила пропорциональна какой-нибудь функции расстояния от центра C* (рис. 32), *и тело из A падает к этому центру. Найти его скорость в какой-нибудь точке P и время, в течение которого проходится путь AP.*

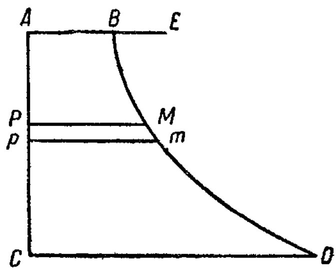

Рис. 32.

Решение

Пусть кривая BMD является кривой сил, т. е. законом центростремительной силы: тело в P притягивается к C силой, равной PM, которая так относится к силе тяжести, как PM относится к постоянному отрезку AE, которым и выражается сила тяжести. Пусть теперь будет $AP = x$, $PM = p$, $AE = 1$, и высота, соответствующая скорости в P, равна v. Итак, ускорительная сила равна p, и потому, обозначив $Pp = dx$, мы будем иметь

$$dv = p\,dx$$

(§ 213). Отсюда интегрированием получается

$$v = \int p\,dx.$$

Но $\int p\,dx$ выражает площадь $ABMP$; поэтому мы будем иметь

$$v = \frac{ABMP}{AE},$$

где написан делитель $AE = 1$ в целях однородности. Если мы теперь знаем высоту v, то то время, в течение которого проходится путь AP, будет равно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\int p\,dx}};$$

так как мы предполагаем, что p выражается через x, то это выражение может быть вычислено при помощи квадратур. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

322. Из этого ясно, что если тело с той же скоростью, с которой оно достигло C, будет двигаться назад кверху, то движение его подъема будет похожим на движение падения, и в точке P оно будет иметь ту же скорость, которую имело раньше; поэтому время его подъема по CP должно быть одинаковым со временем падения по тому же пути.

Следствие 2

323. Мы здесь предположили, что тело в A не имеет никакой скорости и начинает свое движение из состояния покоя. Но вычисление не будет ничуть труднее, если мы припишем ему в A какую-нибудь скорость; а именно, в этом случае диференциал $p\,dx$ нужно интегрировать, так чтобы при $x = 0$ само выражение $\int p\,dx$ представляло высоту, соответствующую начальной скорости. Время же, выведенное при этом условии из $\int p\,dx$, мы получим такое же, как и раньше.

Примечание 1

324. Правда, мы приняли, что p является функцией x, т. е. функцией не расстояния от центра сил C, но расстояния от начала движения A. Но решение задачи включает и этот случай: ведь если p есть функция расстояния CP от центра сил C, которое обозначим через y, то мы будем иметь $y = a - x$, где a обозначает все расстояние AC, и поэтому p, как мы приняли, будет обозначать функцию от $a - x$, т. е. функцию от x и от постоянных величин.

Однако наше решение еще шире: оно определяет движение тела, на которое действует любая сила, независимо от того, есть ли какая-либо определенная неподвижная точка или нет, лишь бы только эти силы везде имели одно и то же направление. Если этого не будет, то тело перестанет двигаться по прямой линии, а будет двигаться по кривой; о движении этого рода мы будем говорить в дальнейшем.

Примечание 2

325. До сих пор мы определяли прямолинейные движения тела по данной силе. Теперь остается вторая часть этой главы, где по данному движению нужно будет определить закон сил. Данными могут быть скорости или промежутки времени, но и в том и в другом случае вопрос надо исследовать с двух точек зрения. А именно, или обращается внимание единственно на падение или подъем, в каждый отдельный момент которых считаются данными или скорости или время, в которое проходится каждый отрезок пути, или же рассматриваются неопределенные падения к неподвижной точке с различных высот и при этих падениях даются или конечные скорости или время, в которое совершается отдельное падение. Отсюда вытекают четыре основных задачи, решение которых и нужно здесь привести. Конечно, кроме этого, возможны и другие вопросы, при которых даются не просто скорости или не просто время, а некоторые другие условия, составленные из тех и из других. Из вопросов подобного рода, — а их можно изобрести бесконечное количество, — мы приведем некоторые, наиболее выдающиеся, и из решения их могут стать понятными решения других.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 42

Задача

326. *Дана скорость тела, движущегося по прямой AP* (рис. 22). *Требуется найти закон силы,*

которая может произвести это движение, воздействуя на тело.

Решение

Пусть проходится путь AP, который мы обозначим через x, и пусть высота, соответствующая данной скорости в P будет равна v, которая считается данной функцией от x и от постоянных величин. Пусть искомая сила, действующая в P, будет обозначена через p, которую, значит, можно будет найти из ускорения тела dv за время, когда проходится элемент пути $Pp = dx$.

Так как

$$dv = p\,dx$$

(§ 213), то мы будем иметь

$$p = \frac{dv}{dx},$$

т. е. искомая сила так будет относиться к силе тяжести, как приращение высоты, соответствующей данной скорости, к элементу пути, который за это время проходится. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

327. Если $v = x$, т. е. если пройденный путь будет сам высотой, соответствующей данной скорости, то $dv = dx$ и $p = 1$; а это указывает, что сила, производящая это движение, является постоянной и равна самой тяжести.

Следствие 2

328. Если скорости считать пропорциональными пройденному пути, то

$$v = \frac{x^2}{f},$$

где f — искомая постоянная величина. Таким образом мы получим

$$dv = \frac{2x\,dx}{f}$$

и

$$p = \frac{2x}{f}.$$

Поэтому сила будет пропорциональна пройденному пути.

Примечание 1

329. Но выше было установлено, что этот случай существовать не может. В самом деле, в этом случае сила в самом начале A движения равна нулю, и тело никогда не может выйти из этой точки, постоянно пребывая там в покое. То же показывает подсчет времени, потраченного на прохождение по AP, — времени, которое будет равно

$$\int \frac{dx}{x}\sqrt{f},$$

эта величина бесконечна, если только принять, что интеграл обращается в нуль при $x = 0$.

Следствие 3

330. Чтобы этого не произошло, нужно, чтобы $\frac{dv}{dx}$ было величиной такого рода, чтобы она при $v = 0$

не обращалась в нуль, а становилась или конечной или бесконечной. А из этого ясно, что кривая AM высот, соответствующих скоростям (рис. 30), у которой, если принять $AP = x$, ординаты PM представляют эти высоты v, не должна в A совпадать с осью, но должна с нею составлять конечный угол.

Примечание 2

331. Все это надо понимать только относительно тех случаев, где скорость тела в A принимается равной нулю и где кривая AM пересекается с осью в A. Но дело обстоит иначе, если тело в A уже имеет скорость, с которой — хотя бы и при силе, равной нулю, — оно может выйти из A и потом подвергнуться действию силы. В этом случае для прохождения расстояния AP бесконечного времени не потребуется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 43

Задача

332. *Дано время, за которое тело, двигаясь по прямой AC* (рис. 32), *проходит отдельные отрезки пути AP. Определить закон силы, которой создается это движение.*

Решение

Пусть опять будет обозначен путь AP через x а время, за которое он проходится, через $\sqrt{t}$, так как квадрат выражения времени есть величина первого измерения. Пусть, далее, искомая сила обозначена через p, а высота, соответствующая скорости в P, будет равна v; она, будучи найденной из вычисления, нужна для нахождения p.

При этих условиях будет, как и раньше,

$$dv = p\,dx$$

и

$$v = \int p\,dx.$$

Таким образом

$$\sqrt{t} = \int \frac{dx}{\sqrt{\int p\,dx}}.$$

Диференцируя это последнее уравнение, мы получаем из него

$$\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{dx}{\sqrt{\int p\,dx}}$$

и

$$\int p\,dx = \frac{4t\,dx^2}{dt^2}.$$

Диференцируя вновь это выражение и считая dx постоянным, мы будем иметь

$$p = \frac{4\,dx}{dt} - \frac{8t\,dx\,d^2t}{dt^3}.$$

Ч. и Т. Н.

Следствие 1

333. Если принять время равным T, оставив без внимания однородность, то $t = T^2$, и мы получим

$$p = -\frac{2\,dx\,d^2T}{dT^3}.$$

Это выражение проще предыдущего и легче применяется в специальных случаях.

Следствие 2

334. Если время принимается пропорциональным пройденному пути, то $T = x$ и $d^2T = 0$, так как dx — постоянная величина. Отсюда следует, что и сила будет равна нулю, что указывает на то, что тело продолжает это движение равномерно под влиянием присущей ему силы (инерции).

Примечание

335. Надо здесь отметить, что для T надо взять такого рода функцию от x, которая при $x = 0$ сама обращается в нуль, а с увеличением x сама будет также расти. Ведь совершенно невозможно, чтобы тело продолжало движение, а время уменьшалось. Предположим, например, что

$$T = \sqrt{2ax - x^2}.$$

Эта величина с ростом x растет только до известного предела, а затем уменьшается. Таким образом мы будем иметь:

$$dT = \frac{a\,dx - x\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

и

$$d^2T = -\frac{a^2\,dx^2}{(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Отсюда получится

$$p = \frac{2a^2}{(a-x)^3},$$

или, приняв $AC = a$, мы можем сказать, что тело в P будет двигаться к C силой, обратно пропорциональной кубу расстояния от C. При этих условиях время $\sqrt{2ax - x^2}$ дальше, чем до C, где $x = a$, не имеет силы, но об этом случае уже говорилось (§ 289). Отсюда, повидимому, можно сделать вывод, что тело, придя в C, никогда из него не выйдет, — но как это может случиться, когда его скорость в C бесконечно велика, понять никак невозможно. К этому присоединяется то обстоятельство, что при

$$\sqrt{v} = \frac{dx}{dT} = \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a - x}$$

скорость тела, когда оно движется по ту сторону C, должна была бы быть отрицательной, а это значит, что тело из C уйти не может, а должно приближаться к C. Все это так одно другому противоречит, что увязать это в данное время не представляется возможным.

Следствие 3

336. Если элемент времени $dT = \frac{dx}{\sqrt{v}}$, то скорость тела в любом месте

$$\sqrt{v} = \frac{dx}{dT};$$

отсюда, согласно данному закону времени, одновременно определяется скорость тела в отдельных местах, что, впрочем, следует из самого соотношения между скоростью и временем, вне зависимости от сил (§ 37).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 44

Задача

337. *Тело падает по прямой AP* (рис. 33) *до точки P за определенное время. Достигнув в P определенной скорости, оно в течение такого же времени с этой скоростью движется равномерно и проходит за это время расстояние PM, равное ординате данной кривой AM. Определить закон силы, под влиянием которой возникает такое движение.*

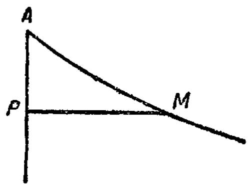

Рис. 33.

Решение

Если принять $AP = x$ и $PM = s$, то s будет вследствие данной кривой AM функцией от x. Пусть, далее, сила, действующая в P на тело, равна p; высота, соответствующая скорости в P, будет равна v, а время, в течение которого проходится путь AP, равно T. Так как расстояние s проходится равномерным движением за промежуток времени T со скоростью $\sqrt{v}$, то мы будем иметь

$$T = \frac{s}{\sqrt{v}}$$

(§ 30), а

$$v=\int p\,dx \quad \text{и} \quad T=\int \frac{dx}{\sqrt{\int p\,dx}},$$

вследствие чего мы будем иметь

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\int p\,dx}}=\frac{s}{\sqrt{\int p\,dx}}$$

или, подставив v на место $\int p\,dx$, чтобы сделать вычисление более удобным, мы получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{s}{\sqrt{v}}.$$

Диференцируя это выражение, получаем

$$\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{ds}{\sqrt{v}}-\frac{s\,dv}{2v\sqrt{v}},$$

откуда получается такое уравнение:

$$\frac{dv}{v}=\frac{2ds}{s}-\frac{2dx}{s}.$$

Его интеграл:

$$\ln v=2\ln s-2\int \frac{dx}{s},$$

или

$$v=e^{-2\int \frac{dx}{s}}s^2,$$

где e обозначает число, логарифм которого равен единице. Снова произведя диференцирование, мы получим

$$dv=p\,dx=2e^{-2\int \frac{dx}{s}}(s\,ds-s\,dx);$$

и, наконец, отсюда получается

$$p = 2se^{-2\int\frac{dx}{s}}\left(\frac{ds-dx}{dx}\right).$$

Таким образом искомая сила p получается из этого уравнения, так как принимается, что s дано как функция от x. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

338. Так как

$$v = e^{-2\int\frac{dx}{s}}s^2,$$

то отсюда мы будем иметь скорость тела, которую оно имеет в P, а именно

$$\sqrt{v} = e^{-\int\frac{dx}{s}}s.$$

Какую постоянную величину надо прибавить при интегрировании

$$\frac{dx}{s},$$

мы это скоро покажем.

Следствие 2

339. Из этого также легко выводится время T, в течение которого проходится путь AP. Ведь если

$$T = \frac{s}{\sqrt{v}},$$

то мы будем иметь

$$T = e^{\int\frac{dx}{s}},$$

Так как при $x=0$ T должно равняться нулю, то $\frac{dx}{s}$ следует интегрировать так, чтобы при $x=0$ выражение $e^{\int\frac{dx}{s}}$ обратилось в нуль. А для этого необходимо, чтобы при $x=0$ $\int\frac{dx}{s}$ был бы равен $-\infty$

Следствие 3

340. Пусть $s=nx$; тогда мы будем иметь:

$$\int\frac{dx}{s}=\frac{1}{n}\ln x+\ln c.$$

Поэтому при всяком c

$$\int\frac{dx}{s}=-\infty,$$

если только $x=0$. Поэтому

$$e^{\int\frac{dx}{s}}=cx^{\frac{1}{n}}=T.$$

А следовательно, мы получим:

$$p=\frac{2n(n-1)}{c^2}x^{\frac{n-2}{n}}$$

и

$$\sqrt{v}=\frac{n}{c}x^{\frac{n-1}{n}}.$$

Следствие 4

341. Если $s=x$, то ясно, что движение по AP должно быть равномерным, что и показывает вычи-

сление. Ведь в данном случае n равно единице, а отсюда $p=0$ и

$$\sqrt{v}=\frac{n}{c},$$

т. е. оно постоянно.

Следствие 5

342. Если n меньше единицы, то скорость в точке A становится бесконечно большой, а равно и сила p, — она будет обратно пропорциональна пройденному пути в степени $\frac{2-n}{n}$.

Следствие 6

343. Если n больше единицы, но меньше двух, то скорость в A обращается в нуль, сила же остается в A бесконечно большой и постепенно уменьшается, будучи обратно пропорциональной пройденному расстоянию в некоторой степени.

Следствие 7

344. Если $n=2$, то это будет случай постоянной силы. В самом деле, в этом случае

$$p=\frac{4}{c^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{v}=\frac{2}{c}\sqrt{x}.$$

Этот случай мы уже разобрали в предложении 28 (§ 230), где мы показали, что тело в случае постоянной силы, выходя из состояния покоя и падая, приобретает в любом месте пройденного пути такую скорость, что за то же время равномерным движением оно может пройти двойное расстояние.

Следствие 8

345. Если n больше двух, то тут являются те случаи, о которых мы говорили (§ 319), что они в природе не встречаются, хотя бы вычисление и показывало нам иное. Ведь в этом случае скорость в A становится равной нулю, и сила в этой точке также обращается в нуль, почему тело никогда не сможет уйти из A; и это несмотря на то, что вычисление дает для времени T прохождения некоторого расстояния AP конечное число.

Примечание

346. Случай этого предложения такого рода, что в данных условиях задачи соединены и скорость и время, и отсюда надо вывести закон силы. Приводить большее число таких примеров было бы излишне, так как из одного этого ясно виден метод решения всех остальных.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 45

Задача

347. *Даны скорости, которые приобретает в самом центре сил C тело, приближающееся с любых расстояний к этому центру сил* (рис. 34). *Определить закон центростремительной силы, производящей подобного рода падения, допустив, что тело начинает каждое отдельное падение из состояния покоя.*

Решение

Пусть CM представляет кривую высот, соответствующих скоростям, которые тело приобретает в точке C, так что PM является высотой, соответствующей скорости, которую тело, начиная падение из P, приобретает в C. Кривая же DN пусть будет искомой кривой сил, ордината которой PN должна изображать центростремительную силу, действующую на тело в точке P. Линия CB пусть изображает центростремительную силу, равную силе тяжести. При этих данных, если тело падает из P в C, высота, соответствующая скорости его в C, будет равна площади $CDNP$, деленной на BC (§ 321). Поэтому мы будем иметь

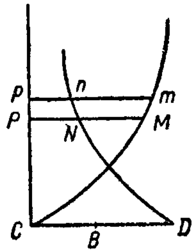

Рис. 34.

$$PM = \frac{CDNP}{BC}.$$

Обозначим теперь CP через y, PM через v и PN через p. Положим $BC = 1$. Тогда будем иметь

$$v = \int p\,dy,$$

а после диференцирования $dv = p\,dy$. Поэтому, когда дается v как функция от y, мы получим

$$p = \frac{dv}{dy}.$$

Ч. и Т. Н.

Следствие 1

348. Если скорости, приобретенные в C, пропорциональны пройденным путям, то $\sqrt{v}$ будет пропорционально y, и, следовательно, p пропорционально y. Таким образом центростремительная сила пропорциональна расстоянию от центра C.

Следствие 2

349. Если предположить, что скорости, приобретенные в C, пропорциональны n-й степени расстояния от центра, то v будет пропорционально y^{2n}, — значит, p пропорционально y^{2n-1}. Следовательно, центростремительная сила будет пропорциональна $2n-1$-й степени расстояния.

Следствие 3

350. Так как скорость, приобретенная в C, при $y=0$ должна равняться нулю и, кроме того, большему расстоянию y должна соответствовать большая скорость, то n должно по необходимости быть числом положительным.

Следствие 4

351. Сила p будет величиной постоянной, если $n=\frac{1}{2}$. Если n будет меньше этого числа, то центростремительная сила будет обратно пропорциональна какой-то степени расстояния от центра. Если же $n>\frac{1}{2}$,

то она будет прямо пропорциональна какой-то степени расстояния. А значит, в первом случае центростремительная сила в C будет бесконечно велика и с увеличением расстояния будет постепенно уменьшаться, во втором же случае она в C будет обращаться в нуль и с ростом расстояния будет увеличиваться.

Следствие 5

352. Если

$$PM = \frac{CDNP}{CB},$$

то ясно, что кривая CM является кривой высот, соответствующих скоростям, и для того случая, если тело выходит из C по прямой CP с заменой центростремительной силы силой центробежной и если движение начинается из состояния покоя (§ 321).

Примечание

353. Хотя, таким образом, задача сводится к предложению 42 (§ 326) с заменой только центростремительной силы на центробежную, однако время подъема по CP при центробежной силе не будет равно времени падения по PC при центростремительной силе. В самом деле равенство скоростей, которые появляются в одном и другом случае при прохождении одинаковых расстояний, вовсе не влечет за собой равенства промежутков времени; легко видеть, что верно обратное. Всякий раз, как центростремительная сила в C будет обращаться в нуль, центробежная сила

в C также обращается в нуль. Поэтому время подъема по CP будет бесконечно большим (§ 314), тогда как падение совершается в конечное время.

Таким образом из равенства скоростей не получается никакой помощи для решения нижеследующей задачи. В следующем предложении мы предполагаем данным время, в течение которого совершается каждое падение, и эта задача не только является очень трудной для решения, но по кривой времен вовсе нельзя получить кривой сил. Поэтому в этом предложении мы рассмотрим только частные случаи, решение которых не превосходит наших сил.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 46

Задача

354. *Промежутки времени, в течение которых тело с какого-нибудь расстояния PC* (рис. 35) *доходит до центра сил C, пропорциональны некоторой степени расстояния. Определить закон центростремительной силы.*

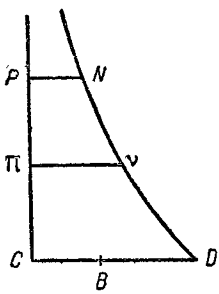

Рис. 35.

Решение

Пусть эти промежутки времени будут пропорциональны n-й степени расстояния и пусть кривая DN будет искомой кривой центростремительной силы, так что ордината $\pi\nu$ изображает силу, которой толкается тело, находящееся в π, по направлению к C, причем CB представляет силу тяжести. При этих условиях пусть тело падает из какой-либо точки P и пусть расстояние $PC = a$.

Время падения по PC будет пропорционально a^n; мы примем его равным

$$Ca^n,$$

где C обозначает постоянную величину, не зависящую от a, так как a с изменением точки P является величиной переменной.

Пусть теперь тело пришло в какое-либо место π и пусть

$$C\pi = x.$$

Тогда высота, соответствующая его скорости в этом месте, будет равна

$$\frac{PN\nu\pi}{BC} = \frac{CPND - C\pi\nu D}{BC}$$

(§ 321). Положим, что

$$\text{площадь } CPND = A,$$

$$\text{площадь } C\pi\nu D = X,$$

а

$$BC = 1;$$

таким образом высота, соответствующая скорости в π, будет равна

$$A - X,$$

а сама скорость будет иметь вид:

$$\sqrt{A - X}.$$

Но здесь надо заметить, что X является некоей функцией от x и от постоянных величин, не зависящих от a; площадь же $C\pi\nu D$ не зависит от точки P, и где бы мы ни взяли точку P, эта площадь сохраняет одну и ту же величину, если только расстояние $C\pi$ остается одно и то же. Далее, A является функцией от a такого же вида, как и X функцией от x. Если x делается равным a, то функция X переходит в A. Время, в течение которого при этом падении проходится путь $C\pi$, будет равно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A-X}},$$

причем этот интеграл надо взять так, чтобы при

$$x = 0$$

он обратился в нуль.

Из этого выражения мы получим и полное время падения по PC, если мы положим

$$x = a,$$

а в этом случае X перейдет в A. Так как это полное время должно иметь такой вид, чтобы a имело n измерений (ведь оно должно равняться Ca^n), то в неопределенном интеграле

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A-X}}$$

a и x должны непременно иметь тоже n измерений. Поэтому и диференциал

$$\frac{dx}{\sqrt{A-X}}$$

будет иметь n измерений, причем как a и x, так и dx должны считаться величинами одного измерения. Выражение

$$\sqrt{A-X}$$

будет иметь $1-n$ измерений, выражение же $A-X$ будет иметь $2-2n$ измерений относительно a и x. Но так как X не зависит от a, то X должно быть функцией $2-2n$ измерений одного только x; поэтому X должно иметь вид:

$$bx^{2-2n},$$

а следовательно

$$A = ba^{2-2n}.$$

Что же касается постоянной, то ее можно прибавить к

$$bx^{2-2n},$$

так как она, будучи также прибавлена и к

$$ba^{2-2n},$$

исключается из

$$A-X.$$

В самом деле, положим

$$X = bx^{2-2n} + bc^{2-2n}.$$

Тогда

$$A = ba^{2-2n} + bc^{2-2n},$$

а потому

$$A-X = b(a^{2-2n} - x^{2-2n}).$$

Так как X обозначает площадь $C\pi\nu D$, то при $x = 0$ оно должно превратиться в нуль. Поэтому, если $2 - 2n$ число положительное, то непременно

$$bc^{2-2n} = 0.$$

Если же $2 - 2n$ число отрицательное, то bc^{2-2n} должно обратиться в отрицательную бесконечную величину. А раз так, то во всяком случае

$$bc^{2-2n} = -b\,0^{2-2n};$$

в самом деле, если $2 - 2n$ или $1 - n$ числа положительные, то это выражение естественно обратится в нуль; если же $1 - n$ будет числом отрицательным, то указанное выражение как раз и обратится в найденную выше бесконечность.

Так как наша задача заключается в том, чтобы найти закон центростремительной силы, то для нас несущественно то, будет ли эта постоянная величина равна нулю или бесконечности. В самом деле, если центростремительная сила в π будет равна

$$p = \pi\nu,$$

то

$$\text{площадь } C\pi\nu D = \int p\,dx.$$

Поэтому мы будем иметь

$$bx^{2-2n} + bc^{2-2n} = \int p\,dx,$$

а произведя диференцирование, мы получим

$$p = (2 - 2n)\,bx^{1-2n}.$$

В результате оказывается, что центростремительная сила должна быть пропорциональна $(1-2n)$-й степени расстояния. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

355. Для того чтобы все падения к центру C были изохронными, т. е. для того, чтобы они требовали одинаковых промежутков времени, нужно, чтобы было

$$n = 0.$$

Это значит, что центростремительная сила должна быть прямо пропорциональна расстоянию. Мы уже раньше заметили, что в этом случае все падения к центру являются изохронными (§ 283).

Следствие 2

356. Если

$$n = 1,$$

т. е. если время падения будет пропорционально пройденному пути, то центростремительная сила будет равна нулю [46].

Следствие 3

357. Если

$$n = \frac{1}{2},$$

т. е. если время пропорционально квадратному корню из расстояния, то центростремительная сила будет постоянна. Это свойство нами и было обнаружено выше (§ 218).

Если, далее,

$$n > \frac{1}{2},$$

то с увеличением расстояния центростремительная сила уменьшается; если же

$$n < \frac{1}{2},$$

то с увеличением расстояния она увеличивается.

Примечание

358. Все эти свойства вытекают из предложения 39 (§ 308), где мы доказали, что если центростремительная сила пропорциональна n-й степени расстояния, то время падения будет пропорционально степени $\frac{1-n}{2}$ от расстояния. Прежнее предложение великолепно совпадает с теперешним: подставив n вместо $\frac{1-n}{2}$, мы получим $1-2n$ вместо n.

Но надо думать, что, имея прежнее предложение, я все же не напрасно привел и это, так как здесь я вывел закон центростремительной силы a priori аналитическим методом из данного условия времени, тогда как там я пришел к тому же результату в обратном порядке. Кроме того, тогда не было установлено, что, кроме найденных там законов центростремительной силы, нет никаких других.

Наконец, само решение в дальнейшем будет для нас исключительно полезным. В самом деле, поскольку это решение чисто аналитическое и проведено особым, никем еще не примененным методом, оно может привести к решению многих других задач, которые напрасно пытались решить другими способами.

Так как подобного рода метод до сих пор был неизвестен, то не были найдены a priori и изохронные падения и таутохронная кривая, и геометры случайно наталкивались на эти свойства — или исследуя центростремительную силу, пропорциональную расстоянию, или же изучая циклоиду.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 47

Задача

359. *Дана кривая BND* (рис. 36), — *кривая сил, которые действуют на тело, падающее по прямой AC. Найти другие бесчисленные кривые, как например, βνδ, — кривые сил, под действием которых тело приобретает в C такую же скорость. При этом всегда предполагается, что тело начинает движение в A из состояния покоя.*

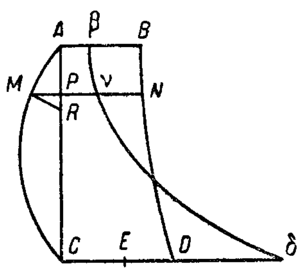

Рис. 36.

Решение

Если кривая BND — кривая сил, то высота, соответствующая скорости, которую тело будет иметь в C, равна (§ 321) площади $ABDC$, деленной на CE, где CE обозначает силу тяжести. На том же основании, если исходить из кривой $\beta\nu\delta$, эта высота будет равна

$$\frac{A\beta\delta C}{CE}.$$

Следовательно,

$$ABDC = A\beta\delta C.$$

Таким свойством, очевидно, будут обладать бесчисленные искомые кривые. Для того чтобы в любой точке P пути AC было равенство

$$ABNP = A\beta\nu P,$$

безусловно необходимо, чтобы кривая $\beta\nu\delta$ совпадала с кривой BND.

Пусть между этими площадями будет какая-то разница; обозначим эту разницу через Z, так что

$$A\beta\nu P = ABNP - Z.$$

Эта разница должна быть такого рода, что когда точка P попадает в A или в C, она обращается в нуль.

Построим на оси AC произвольную кривую AMC, пересекающую ось в точках A и C. Ординату PM этой кривой мы можем использовать вместо Z, так как когда точка P попадает в A или в C, она обращается в нуль. Но для того чтобы из этой AMC можно было получить бесчисленные кривые $\beta\nu\delta$, вместо Z нужно взять не самую ординату PM, а какую-то функцию от нее. Эта функция должна иметь то свойство, что она должна обращаться в нуль, когда обращается в нуль PM.

При этих условиях положим

$$AC = a,$$
$$AP = x,$$
$$AN = y,$$
$$P\nu = Y$$

и

$$PM = z;$$

из этих величин можно считать известными a, x, y, z, а равно и Z, функцию от z; неизвестной же величиной будет Y. Она может быть определена из уравнения

$$\int Y\,dx = \int y\,dx - Z.$$

Произведя диференцирование, мы получим

$$Y = y - \frac{dZ}{dx},$$

а по этому уравнению можно будет построить кривую $\beta\nu\delta$. Ч. и Т. Н.

Следствие 1

360. Положим

$$Z = nz^2.$$

Тогда

$$dZ = 2nz\,dz$$

и

$$Y = y - \frac{2nz\,dz}{dx}.$$

Но

$$\frac{z\,dz}{dx}$$

обозначает поднормаль к кривой AMC, причем нормаль MR проведена в точке M. Следовательно, если принять $N\nu$, а эта линия равна $y-Y$, равной любому кратному поднормали PR, то кривая $\beta\nu\delta$ будет удовлетворять условиям задачи.

Следствие 2

361. Мы можем также положить

$$dZ = pz\,dz,$$

где p будет обозначать какую-либо функцию от z. Здесь нам нет нужды обращать внимание на то, что Z должно при $z=0$ обратиться в нуль. В самом деле, какую бы функцию мы ни взяли вместо p, интеграл от $pz\,dz$ всегда можно взять так, чтобы он при $z=0$ обращался в нуль. Поэтому мы будем иметь

$$Y = y - \frac{pz\,dz}{dx} = y - p \cdot PR,$$

т. е.

$$N\nu = p \cdot PR,$$

откуда можно получить неограниченное количество построений.

Примечание

362. Необходимо отметить, что кривыми BND и AMC необязательно должны быть регулярные кривые, выраженные определенными уравнениями: для

построения кривых $\beta\nu\delta$ можно взять нерегулярные кривые. В этом случае построения также приводятся к определению поднормали.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 48

Задача

363. *Дана кривая* BND (рис. 36), *— кривая сил, которые действуют на тело, проходящее путь* AC. *Найти другие бесчисленные кривые, как например* $\beta\nu\delta$, *— кривые сил, под действием которых тело будет проходить путь* AC *за то же самое время.*

Решение

Возьмем какой-нибудь путь AP, и пусть время, в течение которого проходится этот путь под действием шкалы сил BND, будет равно t; время же, в течение которого тот же путь проходится под действием шкалы $\beta\nu\delta$, пусть будет равно T. Положим

$$T = t + Z,$$

причем Z обращается в нуль, когда точка P попадет в A или же в C.

Как и раньше, Z я делаю функцией от ординаты PM кривой AMC, пересекающей ось AC в A и C, причем эта функция при

$$PM = z = 0$$

должна обращаться в нуль.

Обозначим теперь AP через x, AN через y и $P\nu$ через Y. Тогда мы будем иметь:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\int y\,dx}}$$

и

$$T = \int \frac{dx}{\sqrt{\int Y dx}},$$

вследствие чего мы получим такое уравнение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\int Y\,dx}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\int y\,dx}} + Z.$$

Отсюда можно определить Y. В самом деле, произведя диференцирование, мы будем иметь:

$$\frac{dx}{\sqrt{\int Y dx}} = \frac{dx}{\sqrt{\int y\,dx}} + dZ,$$

откуда мы получим следующее:

$$\sqrt{\int Y dx} = \frac{dx \sqrt{\int y\,dx}}{dx + dZ \sqrt{\int y\,dx}}$$

и

$$\int Y dx = \frac{dx^2 \int y\,dx}{\left(dx + dZ \sqrt{\int y\,dx}\right)^2}.$$

Так как величины x, y и Z известны, то полученное выражение может быть построено. Положим его равным P и мы получим

$$Y dx = dP,$$

откуда

$$Y = \frac{dP}{dx}.$$

Ч. и Т. Н.

Следствие 1

364. Пусть

$$dZ = pz\,dz,$$

где p, как и раньше, обозначает какую-нибудь функцию от z; величина $\frac{z\,dz}{dx}$ есть величина поднормали PR, которую мы обозначим через r. В таком случае мы будем иметь

$$P = \frac{\int y\,dx}{\left(1 + rp\sqrt{\int y\,dx}\right)^2}$$

и

$$Y = \frac{dP}{dx}.$$

Следствие 2

365. Пусть данная кривая BND будет прямой линией, параллельной оси AC, так что сила постоянна. Это значит, что дана постоянная сила, действующая на тело, которое за данное время проходит путь AC. Положим

$$AB = PN = b;$$

тогда мы получим

$$\int y\,dx = bx.$$

Отсюда мы будем иметь

$$P = \frac{bx}{(1 + rp\sqrt{bx})^2},$$

диференцируя это выражение, мы получим

$$Y = \frac{dP}{dx}.$$

Примечание

366. Последние два предложения, весьма близкие одно к другому, я привел потому, что они требуют особого метода решения, польза которого будет очевидна в дальнейшем. Впрочем, эти предложения довольно изящны и их необходимо было включить в эту главу, где мы решили рассмотреть все случаи, относящиеся к прямолинейному движению, производимому силами. Мы не сочли, однако, удобным применять эти предложения к специальным случаям ввиду весьма сложных вычислений, к которым пришлось бы для этого прибегать.

Итак, оставляя эти вопросы, переходим к прямолинейным движениям в сопротивляющейся среде.

THEORIA MOTVS CORPORVM SOLIDORVM SEV RIGIDORVM

EX

PRIMIS NOSTRAE COGNITIONIS PRINCIPIIS

STABILITA

ET AD OMNES MOTVS,

QVI IN HVIVSMODI CORPORA CADERE POSSVNT,

ACCOMMODATA.

AVCTORE

LEONH. EVLERO

ACADEMIAE REGIAE SCIENT. BORVSSICAE DIRECTORE

AÇADEMIAE IMPER. PETROPOL. SOCIO HONORARIO

ET ACADEMIARVM SCIENT. REGIARVM PARISINAE

ET LONDINENSIS MEMBRO

ROSTOCHII ET GRYPHISWALDIAE

LITTERIS ET IMPENSIS A. F. RÖSE. MDCCLXV

Л. ЭЙЛЕР

ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ,

ВЫВЕДЕННАЯ ИЗ ПЕРВОНАЧАЛЬНЫХ
ПРИНЦИПОВ НАШЕГО ПОЗНАНИЯ
И ПРИМЕНЕННАЯ КО ВСЕМ ДВИЖЕНИЯМ,
КОТОРЫЕ МОГУТ ИМЕТЬ
ЭТОГО РОДА ТЕЛА [47]

ВВЕДЕНИЕ,
СОДЕРЖАЩЕЕ НЕОБХОДИМЫЕ ПОЯСНЕНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ О ДВИЖЕНИИ ТОЧЕК

Глава I

О ДВИЖЕНИИ ВООБЩЕ

Определение 1

1. *Подобно тому как покой — это постоянное пребывание в одном и том же месте, совершенно так же движение — это постоянная перемена места. О теле, которое, согласно наблюдению, постоянно находится в одном и том же месте, говорят, что оно пребывает в состоянии покоя; о теле же, которое с течением времени постоянно меняет место своего пребывания, говорят, что оно движется.*

Пояснение 1

2. Хотя понятия покоя и движения сами по себе и кажутся совершенно ясными, тем не менее, для того чтобы лучше их разобрать, следует внимательно рассмотреть отдельные понятия, положенные в их

основании. И прежде всего перед нами встает понятие места. Что собственно представляет собой место? На этот вопрос не так легко ответить. Представляя себе неизмеримое пространство, в котором находится вселенная, отдельные части его, занятые телами, называют местами этого пространства: ведь в силу своего протяжения каждое тело необходимо должно занимать и совершенно заполнять равную ему часть пространства.

Однако понятие пространства мы можем воспринять лишь с помощью абстракции: для этого мы должны мысленно удалить все тела, и уже то, что, по нашему представлению, после этого остается, мы называем пространством.

Мы, следовательно, полагаем, что после удаления тел их протяжение все-таки остается, — представление, которое философами по многим основаниям оспаривается. Далее, этот вопрос как будто нельзя было бы еще считать разрешенным, пока не будет построена и схожая идея движения. Но мы, решительно отвергая подобного рода сомнительные абстракции, должны рассматривать вещи в том виде, в каком они непосредственно воспринимаются нашими чувствами; в соответствии с этим мы о движении любого тела будем судить лишь на основании одного признака, а именно — относя его к другим телам, расположенным по соседству с ним: до тех пор, пока по отношению к последним данное тело сохраняет неизменным свое положение, мы обычно говорим, что это тело пребывает на одном и том же месте; а когда оно перешло в другое положение, мы говорим, что оно переменило свое место.

Пояснение 2

3. Поскольку, таким образом, мы определяем положение любого тела путем сопоставления его с положением других окружающих тел, которые в это время сохраняют неизменным свое расположение, наше суждение, опирающееся на геометрические представления, не может нас ввести в заблуждение. А именно, положение тела определяется с помощью расстояний от нескольких различных точек, причем для данной цели недостаточно одной или даже двух точек. В самом деле, если я скажу, что точка O находится на расстоянии a от точки A, то этим положение первой точки еще ни в коем случае не будет определено. Ведь существует целая сферическая поверхность, описанная вокруг точки A как центра, радиусом, равным a, в любой точке которой одинаково может находиться точка O, и следовательно, в смысле положения все точки сферической поверхности ничем друг от друга не отличаются. Если же я скажу, что точка O находится на расстоянии a от точки A и на расстоянии b от точки B, то в этом случае надо будет представить себе две сферические поверхности: одну, описанную около A радиусом a, и другую, описанную около B радиусом b. Так как обе эти поверхности дают в сечении круг, то отдель-

ные точки последнего будут расположены таким образом, что они будут находиться на расстоянии a от точки A и на расстоянии b от точки B. Таким образом точка O будет безусловно лежать на окружности этого круга, но где именно — это остается еще невыясненным.

Предположим еще, что точка O, сверх того, находится на расстоянии c от третьей точки C, причем точка C не лежит на одной прямой линии с точками A и B. Описанная около точки C радиусом c сферическая поверхность пересечет упомянутый выше круг все-таки в двух точках, поэтому и в данном случае мы все еще будем находиться в сомнении, в какой именно из этих точек находится точка O; мы будем, следовательно, в неизвестности только относительно двух точек. Отсюда мы заключаем, что если нам известны расстояния точки O от каких-либо четырех точек A, B, C и D, не лежащих в одной плоскости, то положение точки O является уже вполне определенным.

Зачастую, однако, бывает достаточно и трех точек, а именно, если одна из этих точек, равно удовлетворяющих заданному условию, исключается по какому-либо иному основанию.

Примечание

4. Так как приведенное выше определение положения любой точки является чисто геометрическим, то оно не может вызвать каких-либо сомнений: ис-

ходя из него, мы и будем выводить наши рассуждения о покое и движении. Но то, что здесь было изложено о положении точек, может быть легко применено к каким угодно телам; ведь понятие покоя или движения может быть приурочено к телам лишь постольку, поскольку его относят к отдельным точкам этих тел.

Однако, какое бы понятие покоя или движения мы ни построили, мы не сможем его тотчас же просто применить к какому-либо целому телу, так как возможно, что в последнем некоторые точки находятся в покое, другие же в большей или меньшей степени движутся.

Поэтому представляется совершенно необходимым сначала исследовать природу покоя или движения только на точках. Такую постановку вопроса вовсе не следует считать как бы нереальной в силу того соображения, что понятие о точках является чисто абстрактным и что некоторые даже сомневаются в возможности приписать им движение либо покой. Как бы ни разрешались эти спорные вопросы, во всяком случае приходится допустить, что в покоящемся или движущемся теле можно себе представить существование точек, которые либо находятся в состоянии покоя, либо движутся. Разве это не дает основания для того, что подобные точки можно считать элементами тела?

Равным образом ничто не препятствует кому угодно при желании представить себе вместо этих точек действительные элементы тела, которые могут быть либо бесконечно малыми, либо во всяком случае очень малыми. И тут дело сводится к тому же самому, и потому здесь не может возникнуть никаких сомнений. Точно так же ничто не препятствует тому, чтобы считать реальными точки A, B, C и D, к которым я относил положение точки O, так как они являются границами, существующими в действительных телах, от которых и ведется счет расстояний.

Если только не стать на точку зрения совершенного отрицания существования тел, — при таких условиях рассуждение было бы для нас бесплодным, — ни в коем случае не следует недооценивать значения подобного метода для облегчения исследования.

Определение 2

5. *Если точка O находится постоянно на одном и том же расстоянии от четырех или большего числа точек, сохраняющих неизменными взаимные свои расстояния, то говорят, что она по отношению к ним находится в покое.*

По отношению к ним она сохраняет неизменным свое положение.

Следствие 1

6. Если A — твердое тело, постоянно сохраняющее неизменной свою форму, то сколь бы мало оно ни было, всегда можно допустить существование в нем не только четырех, но и сколь угодно боль-

шого числа точек, сохраняющих неизменными взаимные свои расстояния.

Следствие 2

7. Поэтому, если точка O сохраняет неизменным свое положение по отношению к упомянутому телу A, что может иметь место лишь в том случае, когда расстояния этой точки от всех точек тела A остаются неизменными, то говорят, что точка O находится в покое по отношению к телу A.

Следствие 3

8. Итак, здесь мы имеем реальное определение покоя, не связанное с какими-либо сомнительными или нереальными представлениями, но опирающееся на понятие некоторого тела, по отношению к которому точка находится в покое; при этом не ясно, что представляет собой так называемый абсолютный покой, отделенный от понятия подобного тела.

Пояснение 1

9. Правда, здесь, на пороге механики, нам не следует беспокоиться по поводу абсолютного покоя, о котором мы вообще не знаем, существует ли он и в каком именно виде: ведь мы в механике будем подвергать исследованию лишь то, что мы постигаем с помощью наших чувств. Всюду, где у нас идет речь о покое, наше представление о нем всегда связано с некоторым телом, по отношению к которому

согласно нашему определению, тело — или же, еще лучше, точка — находится в покое. Так, мореходы считают находящимися в покое те тела, которые сохраняют неизменным свое положение по отношению к кораблю; точно так же и мы, находясь на суше, обычно приписываем состояние покоя телам, сохраняющим неизменным свое положение по отношению к поверхности Земли. То обстоятельство, что корабль находится в движении, приводит мореходов не к большей ошибке, чем нас, так как, согласно учению астрономов, и Земля сама тоже движется. В установленном здесь понятии покоя мы меньше всего интересуемся вопросом о том, находится ли в покое само по себе то тело, по отношению к которому мы констатируем состояние покоя. И пока точка O сохраняет неизменным свое положение по отношению к телу A, мы говорим, что она находится в состоянии покоя по отношению к последнему: мы не вносим сюда никакого иного смысла, который вышел бы за пределы этих слов.

Вопрос о покое или движении самого тела A был бы, конечно, совершенно новым, требующим иного разрешения. Однако он ничего не прибавил бы к приведенному выше определению.

Так, на корабле по отношению к последнему находится в покое все то, что по отношению к нему не изменяет своего положения; при этом совершенно безразлично, находится ли самый корабль в покое или же он движется.

Пояснение 2

10. Таким образом изложенное здесь понятие покоя должно быть отнесено к категории отношений, так как оно основывается не на положении одной только точки O, которой мы приписываем состояние покоя, но оно устанавливается на основании сопоставления точки O с каким-либо другим внешним телом A. Поэтому на случай, если бы мы когда-нибудь в будущем дошли до того, что узнали бы, существует ли абсолютный покой и какова его природа, мы для отличия введенное здесь понятие будем называть относительным покоем.

Вместе с тем отсюда тотчас же явствует возможность того, что та самая точка, которая находится в покое относительно тела A, по отношению к другим телам не будет находиться в покое, но будет совершать различные движения. Так, например, тело, находящееся в состоянии покоя на корабле, совершает то или иное движение по отношению к Солнцу или другим небесным телам. Отсюда ясно, что рассматриваемые нами свойства покоя или движения не изменяют ничего в самом теле или в точке O, так как эти состояния могут существовать одновременно,— в зависимости от того, к какому телу будет отнесено положение точки.

Примечание

11. Все вышеизложенное должно быть равным образом распространено и на понятие места. В са-

мом деле, если покой есть пребывание на одном и том же месте, то, для того чтобы это определение сохранило свою силу и для относительного покоя, следует сказать так: точка O, которая должна быть в покое относительно тела A, должна по отношению к последнему оставаться в одном и том же месте. И так как точка будет оставаться в неизменном положении относительно тела A, то, значит, одно и то же место обязательно совпадает с одним и тем же положением. И это понятие места, подобно понятию покоя, тоже является относительным, так что относительное место есть некоторое известное определениое положение по отношению к какому-либо телу.

Существует ли другое, более естественное понятие места, мы еще не знаем; если подобное понятие существует, такое место следует назвать абсолютным.

Относительному месту в том его виде, как мы его здесь определили, не следует приписывать неподвижности, как это обыкновенно делают: ведь если тело, по отношению к которому мы установили какое-нибудь место, само находится в движении, то неизбежно допустить, что вместе с ним движется и данное место. Если же кто-либо считает, что тела, сохраняющие неизменными свои места по отношению к неподвижным звездам, находятся в состоянии абсолютного покоя, то для него абсолютное место — это известное и определенное положение относительно неподвижных звезд. Но в какой мере отнесение к неподвижным звездам больше соответствует природе вещей, чем отнесение к каким-либо другим телам, этот вопрос для нас и теперь еще неясен.

Определение 3

12. *Если точка O постоянно изменяет свое положение относительно какого-либо тела A, форма которого все время остается неизменной, то говорят, что она движется относительно тела A.*

Очевидно, форму тела следует принять неизменной, с тем чтобы любые произвольно взятые в нем четыре точки, к которым относят точку O, сохраняли неизменными взаимные свои расстояния.

Следствие 1

13. Все, что нами выше было сказано об относительном покое, может быть легко перенесено на относительное движение. В самом деле, когда точка O сохраняет неизменным свое положение относительно тела A, то говорят, что она находится в покое; если же она постоянно изменяет свое положение относительно этого тела, то говорят, что она имеет относительное движение.

Следствие 2

14. Легко видеть, что одна и та же точка O может находиться в покое относительно тела A и одновременно двигаться относительно тела B.

Таким образом понятие движения, подобно понятию покоя, является относительным и не вызывает ни малейшего изменения в самой точке O.

Следствие 3

15. Итак, движение и покой противоположны друг другу лишь по названию, но не по существу дела, так как их можно одновременно приписать одной и той же точке, — в зависимости от того, с каким телом ее сопоставляют. Движение отличается от покоя не в большей мере, чем одно движение от другого.

Следствие 4

16. Итак, движение и покой неправильно относят к состояниям тел: ведь в тех случаях, когда в состоянии какого-либо предмета происходит изменение, следует считать, что самый предмет как-либо изменился. Между тем в теле не происходит никаких изменений от того, будет ли ему приписано движение или покой.

Пояснение 1

17. Таким образом совершенно рушится то знаменитое различие между движением и покоем, которое философы обычно приводят как чрезвычайно существенное для тел, — если, конечно, исходить из относительности движения и покоя. Правда, философы возразят, что условия коренным образом из-

меняются, когда речь идет об абсолютном движении и покое, но что представляет собой абсолютные движение и покой, этого они удовлетворительно определить не могут.

Если бы они пожелали вывести эти понятия из отношения к неподвижным звездам, то от этого движение и покой не перестанут быть относительными: ведь в данном случае будет лишь то отличие от наших определений, что здесь предлагают иное, но все же определенное тело, по отношению к которому и устанавливаются покой или движение. Однако отсюда еще не видно, каким образом здесь может получиться что-либо для самого тела, для которого устанавливаются этот покой или движение.

Вообще говоря, я ни в коем случае не отрицаю, что существует различие между движением и покоем или между телом движущимся и телом, находящимся состоянии покоя, — да ведь и вся механика занята установлением этого различия. Но в то же время я с полным основанием отрицаю то, что движение и покой связаны хотя бы с каким-нибудь внутренним изменением тела. Пусть философы обсудят, к какому виду предикатов следует отнести движение и покой, но во всяком случае их меньше всего можно назвать качествами. В то же время нет никаких препятствий к тому, чтобы отнести их к числу отношений: ведь когда одну и ту же вещь сравнивают то с одними, то с другими предметами, от этого внутренняя ее сущность не претерпевает никаких изменений.

Пояснение 2

18. После того как мы дали определение понятия места, опираясь при этом на наше чувственное восприятие, мы теперь встречаемся также с понятием времени, которое включается в понятие покоя и движения. В самом деле, если покоем называют *постоянное пребывание* на одном и том же месте, то ведь этих выражений *постоянное* и *пребывание* нельзя понять без представления о времени. Понятие движения требует, конечно, более развернутого представления о времени, исходя из которого можно было бы себе также представить деление его на равные и неравные части. В самом деле, когда точка O изменяет свое положение относительно тела A, это изменение можно установить, лишь определив его величину за любой промежуток времени. Следовательно, если бы у нас, как некоторые склонны думать, не было других средств для определения времени, кроме как из рассмотрения движения, то мы не могли бы признать ни времени без движения, ни движения без времени; следовательно, мы никак не могли бы познать ни того, ни другого. Правда, делить время на части мы научились из наблюдения движения, а именно движения Солнца, но, мне кажется, и без помощи движения мы имеем представление о том, что такое *до* и *после*, а отсюда, повидимому, само собой вытекает понятие последовательности.

И хотя более детальным изучением времени мы обязаны рассмотрению движения, отсюда еще не следует, что время само по себе представляет собой не что иное, как лишь то, что мы воспринимаем. Что представляют собой два равных промежутка времени, это понимает всякий, хотя бы в течение этих промежутков, может быть, и не произошло равных изменений, на основании которых можно было бы притти к заключению о равенстве этих промежутков времени.

Поэтому, независимо от споров, какие могут вести философы по поводу течения времени, нам следует для изучения движения применить некоторую меру времени; при этом следует допустить, что время протекает независимо от движения, так что можно себе представить отдельные части его, между которыми существует равенство или же неравенство в любой пропорции. Кто отказал бы нам в этой возможности, тот вообще уничтожил бы возможность какого-либо познания движения.

Поэтому да будет нам позволено ввести в расчет время наравне с линиями и другими геометрическими величинами.

Определение 4

19. *Пространство, проходимое точкой при ее движении, называется ее путем; так как последний представляет собой линию, то он может быть прямолинейным либо криволинейным.*

В первом случае движение называется *прямолинейным*, во втором — *криволинейным*.

Следствие 1

20. Так как мы пока имеем только понятие относительного движения, то путь или линию, описываемую точкой, следует относить к тому телу, по отношению к которому определяется движение.

Следствие 2

21. Само же упомянутое тело, независимо от того, находится ли оно в покое или в движении, поскольку последнее обстоятельство не принимается в расчет, рассматривается как бы находящимся в неподвижном состоянии, и по отношению к нему следует отмечать направление и расположение пути, описываемого точкой.

Следствие 3

22. Таким образом изучение описываемого точкой пути сводится к рассмотрению трех случаев, из которых первый имеет место, когда движение прямолинейно, и следовательно, путь представляет собой прямую линию. Второй случай имеет место, когда путь представляет собой какую-либо кривую линию, но целиком расположенную в одной плоскости. Третий случай — это тот, когда кривая линия не лежит в одной плоскости.

Пояснение 1

23. Уже в геометрии принимают, что при движении точки описывается линия; последнее само по себе настолько ясно, что как будто не требует до-

казательства. В самом деле, если точка, бывшая раньше в A, находится теперь в B, то она необходимо должна была переместиться по некоторой сплошной линии, простирающейся от A до B; в противном случае пришлось бы утверждать, что она внезапно исчезла в точке A и затем заново возникла в точке B; поскольку последнее было бы чудом, а не движением оно не является предметом нашего исследования. Что касается до тех лиц, которые не желают признавать движения, то, по их мнению, они дают более ясное представление об этом явлении, когда утверждают, что рассматриваемая точка уничтожается в отдельных точках наблюдаемого пути и тотчас же заново возрождается в следующих точках: выходит так, будто перемещение с одного места на другое труднее понять, чем попеременные исчезновение и возникновение.

Но так как, с иной точки зрения, движение может быть и покоем, то они и о последнем должны утверждать то же самое, а именно, что тело на одном и том же месте постоянно уничтожается, а затем внезапно возрождается; так как это мнение не отличается от той точки зрения, согласно которой сохранение тел рассматривается как постоянное их воспроизведение, то мнение это мало отличается от обычного вульгарного воззрения.

Но ведь в действительности совершенно не бывает такого момента времени, когда бы тело не существовало, поэтому и нельзя сомневаться в том, что оно постоянно существует, причем это постоянное существование тел следует допускать как при их движении, так и при их покое. Отсюда следует, что точка может перейти из одного предельного положения в другое, лишь пробежав последовательно всю линию, простирающуюся от первого положения до второго.

Пояснение 2

24. Предположим, что точка прошла линию $APQB$ (рис. 1); так как точка не может быть одновременно в A и B, то она неизбежно появится в B уже после того, как она побывала в A. Но те явления, которых мы не можем себе представить существующими одновременно, приводят нас к понятию времени, и так как точка побывала в A, то мы считаем, что до B она может дойти лишь по истечении некоторого времени.

Рис. 1.

То же относится и к промежуточным точкам P и Q; так как точка дошла раньше до P, чем до Q, и раньше до Q, чем до B, то отсюда мы и заимствуем деление времени: отсюда следует, что время, за которое точка проходит от A до P, меньше того времени, за которое она проходит от A до Q, а последнее, в свою очередь, меньше того времени, за которое она проходит от A до B. Отсюда ясно, что время есть величина, делимая и поддающаяся измерению, причем мы можем не только одно значение этой величины назвать бо́льшим или меньшим, чем другое, но мы в состоянии указать части ее, которые либо будут равны между собой, либо будут неравны, находясь в некотором определенном отношении. В самом деле, так как время есть некоторая величина, мы неизбежно должны принять, что время, за которое тело проходит от A до P, либо равно, либо больше, либо меньше времени, за которое оно дальше проходит от P до Q, или, как можно еще иначе выразиться, между этими двумя промежутками времени необходимо должно быть некоторое определенное соотношение. Вот почему я с полнейшим правом выдвигаю положение, что время как величина, делимая и поддающаяся измерению, может быть введено в расчет.

Определение 5

25. *Равномерным или однообразным называется такое движение, при котором в равные времена проходятся равные пути. Если же в равные времена проходятся неравные пути или равные пути проходятся в неравные времена, то движение называется неравномерным.*

Следствие 1

26. Итак, если точка движется равномерно, то за удвоенное время она проходит удвоенный путь, за утроенное время — утроенный путь, и вообще пройденные пути находятся в таком же отношении друг к другу, как затраченные на это промежутки времени, и наоборот.

Следовательно, если за время t пройден путь s, а за время T — путь S, то имеет место соотношение

$$t:T = s:S.$$

Следствие 2

27. При неравномерном движении создаются иные условия, и пройденные пути s и S уже не относятся между собой, как промежутки времени t и T.

Разумеется, здесь идет речь о некотором относительном движении, понятие которого у нас только и имеется, причем безразлично, является ли это движение прямолинейным или криволинейным.

Следствие 3

28. Точное разделение времени мы можем получить из равномерного движения; ведь мы можем геометрически разделить путь на части, а отсюда получится аналогичное разделение времени на равные или неравные части.

Примечание 1

29. Отсюда ясно, что деление времени на части не является чисто умственной операцией, как обыкновенно утверждают те, которые помещают время только в нашем сознании, не отделяя понятия времени от самого времени.

В самом деле, если бы время представляло собой не что иное, как последовательность наступающих друг за другом явлений, и если бы вне нашего сознания не существовало никаких средств для измерения времени, то нам ничто не помешало бы при всяком движении считать равными те части времени, в течение которых проходятся равные пути, так как они кажутся следующими друг за другом через равные промежутки. Следовательно, мы могли бы с одинаковым основанием рассматривать любое движение как равномерное. Однако сама природа вещей достаточно убедительно свидетельствует, что равномерное движение существенно отличается от неравномерного; следовательно, равенство промежутков времени, на котором это основывается, представляет собой нечто большее, чем содержание наших понятий. В силу этого следует притти к выводу, что равенство времени имеет под собой определенное основание, находящееся вне нашего сознания; и, повидимому, мы скорее познаем его извне — из наблюдения над равномерным движением.

Примечание 2

30. Если точка движется равномерно — так, что в равные времена она проходит равные пути, — то о ней говорят, что она движется одинаково быстро. Отсюда мы узнаем, что значит *двигаться одинаково быстро.* Если две точки A и B находятся в равномерном движении, причем A за отдельные промежутки времени t проходит пути, равные s, а B за такие же промежутки времени проходит пути, равные σ, и если при этом $s > \sigma$, то говорят, что точка A движется быстрее, чем B, точка же B движется медленнее, чем A.

Отсюда мы заключаем, что значит *быстрее* и *медленнее*. Если, далее, точка A за один и тот же промежуток времени проходит вдвое или втрое больший путь, чем точка B, то говорят, что она движется *вдвое* или *втрое быстрее*.

Указанным путем нашему уму уясняется смысл того, что выражается словом „быстрее", хотя мы по существу еще не давали никаких определений.

Здесь дело идет об абстрактном понятии, которое служит как бы основанием для того, что мы понимаем под словом *быстрее*; это понятие называется *быстротой* или *скоростью*, и ниже мы даем ему определение.

Определение 6

31. *При равномерном движении отношение путей к промежуткам времени, в течение которых они проходятся, называется быстротой или скоростью.*

Следовательно, скорость измеряется частным, которое получается при делении пути на время.

Следствие 1

32. Итак, если при равномерном движении за время, равное t, проходится путь, равный s, то скорость равна $\frac{s}{t}$. Если скорость обозначить буквой v, то

$$v = \frac{s}{t}.$$

Следствие 2

33. При наличии трех установленных таким образом величин — пути, равного s, времени, равного t, и скорости, равной v, по любым двум из них третья величина может быть найдена так:

1) $$v = \frac{s}{t},$$

2) $$t = \frac{s}{v},$$

3) $$s = tv.$$

Следствие 3

34. Если, кроме того, имеется и другое равномерное движение, при котором за время T проходится путь, равный S, то, обозначив скорость через V, мы получим следующие хорошо известные пропорции:

1) $$v:V = \frac{s}{t} : \frac{S}{T},$$

2) $$t:T = \frac{s}{v} : \frac{S}{V},$$

3) $$s:S = tv:TV.$$

Пояснение 1

35. Здесь может, пожалуй, возникнуть сомнение по поводу того, каким образом можно делить путь на время, так как ведь это — величины разнородные, и следовательно, невозможно указать, сколько раз промежуток времени, например в 10 минут, содержится в пути длиной, например в 10 футов.

Но ведь в данном случае речь идет не об абсолютном делении, а лишь о сравнительном, так как понятие скорости не содержит в себе ничего абсолютного. В самом деле, под скоростью понимают только величину относительную: если скорость какого-либо определенного равномерного движения мы будем считать известной и примем ее за единицу, то у всякого другого равномерного движения скорость выразится некоторым числом, и следовательно, никаких дальнейших трудностей здесь не возникнет. Так, например, предположим, что скорость равномерного движения, при котором за время t проходится путь, равный s, принята за единицу, т. е. положим, что $\frac{s}{t}=1$; тогда скорость другого равномерного движения, где путь, равный S, проходится за время, равное T, будет выражаться таким числом, которое относится к единице так, как $\frac{S}{T}$ относится к $\frac{s}{t}$, т. е. она выразится числом, равным

$$\frac{St}{Ts}=\frac{S}{s}\,\frac{t}{T},$$

сомножители же последнего выражения, $\frac{S}{s}$ и $\frac{t}{T}$, представляют собой действительные отношения.

Пояснение 2

36. Но указанное выше затруднение исчезает также и в том случае, если мы сведем все к отвлеченным числам. В самом деле, если для измерения

путей мы изберем определенную длину в качестве единицы и точно так же для времен изберем в качестве единицы определенный промежуток времени и если мы будем постоянно пользоваться этой мерой, то все пути и времена выразятся в отвлеченных числах, и тогда для деления первых на вторые не будет никаких препятствий.

Таким образом приведенные выше отношения, конечно, пропорциональны скоростям, и так как от нашего выбора зависит, какую скорость принять за единицу, то нам ничто не препятствует избрать в качестве единицы именно ту скорость, при которой указанное отношение равно единице. Если мы прибегнем к этому приему, то приведенные выше отношения $\frac{s}{t}$ и $\frac{S}{T}$ будут действительно обозначать некоторые скорости. Однако и простые отношения тоже удовлетворяют цели, а в случае нужды их в каждом отдельном случае легко привести к отвлеченным числам.

Примечание

37. Приведенное понятие о скорости мы вывели из равномерного движения. Однако оно не в меньшей мере применимо и к неравномерному движению.

Конечно, если в равномерном движении скорость повсюду одна и та же, то в неравномерном движении ее следует считать изменяющейся.

В самом деле, мы скоро покажем, что при любом движении, сколь бы неравномерно оно ни было, можно считать, что отдельные мельчайшие элементы пути проходятся как бы при равномерном движении; следовательно, этим способом можно в любой произвольной точке пути указать скорость, с какой пробегается этот воображаемый очень малый участочек пути.

Таким образом скорость можно рассматривать как некоторое особое свойство движения, независимое от описанного пути, так как в каждой произвольной точке последнего дается определенная скорость.

В силу этого *скорость* можно определить и таким образом, что она является определенной мерой движения, благодаря которой при этом движении обеспечивается прохождение определенного пути за определенное время.

Вообще же, подобно тому как здесь мы рассматриваем какое-то относительное движение, точно так же и скорость движения здесь является относительной; следует считать, что в одной и той же точке и в один и тот же момент времени она различна, в зависимости от того, к какому телу отнесено движение. Таким образом может получиться, что тело, движущееся на корабле, имеет по отношению к кораблю совершенно иную скорость, чем по отношению к берегу.

Определение 7

38. *Если движение прямолинейное, то направление движения тоже представляет собой прямую линию, — ту самую прямую, по которой и проис-*

ходит движение. Если же движение криволинейное, то направление движения в какой-либо точке дается касательной к кривой.

Поэтому говорят, что при криволинейном движении направление движения постоянно изменяется, между тем как при прямолинейном оно всегда остается одним и тем же.

Следствие 1

39. Следовательно, направление движения определяется по углу, который оно образует с одной или двумя неподвижными прямыми линиями.

А именно, если движение происходит в одной плоскости, то достаточно знать угол, образуемый с одной неподвижной прямой линией; если же движение происходит не в одной и той же плоскости, то следует знать угол наклона его к двум неподвижным прямым линиям.

Следствие 2

40. При криволинейном движении, если только известна кривая, описываемая движущимся телом, направление движения в отдельных точках определяется тем же способом, с помощью которого определяются касательные.

Примечание

41. Подобно тому как нельзя себе представить какое-либо движение без скорости, точно так же нельзя себе представить его без направления. В са-

мом деле, так как точка, даже за очень короткий промежуточек времени, переходит с одного места на другое, то частное от деления этого отрезочка пути на промежуточек времени дает скорость, а положение этого пути дает направление движения.

В состоянии покоя всякая скорость исчезает, и движение, скорость которого равна нулю, переходит в покой; однако о покое не следует утверждать, что при нем исчезает направление, но скорее следует считать, что в этом случае самый вопрос о направлении теряет смысл; в самом деле, коль скоро мы заявляем, что точка находится в покое, вопрос о направлении уже не имеет места.

Движение характеризуется всеми теми обстоятельствами, которые необходимы для его определения, а именно, можно поставить следующие вопросы:

1. *В каком месте очутится точка по истечении определенного промежутка времени?*

2. *Какой отрезок или какой путь она пройдет за это время?*

3. *Какова будет величина скорости в каждый момент времени?*

4. *Каково будет направление ее движения?*

Так как скорость и направление являются понятиями, выведенными из понятия движения, то их мы определим тотчас же, как только в отдельных случаях дадим ответ на первый вопрос.

Для того чтобы изложить это яснее, мы в соответствии с приведенным выше разделением рассмотрим три рода движения. Сначала мы примем, что точка движется по прямой линии; во вторую очередь мы примем, что описанный путь представляет собой кривую линию, однако расположенную в одной и той же плоскости; и наконец, в-третьих, мы исследуем тот род движения, при котором путь, описываемый движущейся точкой, не лежит в одной и той же плоскости.

Задача 1

42. *Точка движется по прямой линии. Свести общее определение ее движения к вычислениям.*

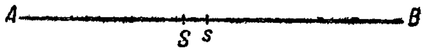

Рис. 2.

Решение

Весь вопрос сводится к тому, чтобы для любого момента времени указать место, в котором находится точка. Итак, пусть будет AB прямая линия (рис. 2), по которой движется точка; пусть начало движения ее будет в A и пусть по истечении времени, равного t, точка достигнет S.

Тогда $AS = s$ представит собой путь, пройденный за время t. Теперь, если дано уравнение, связывающее t и s, — уравнение, с помощью которого можно по одной из этих величин определить другую, — то здесь уже известно все, что необходимо для определения движения.

Действительно, если прибегнуть к диференцированию, то для элемента времени dt определится пройденный в течение его элемент пути ds, а дробь

$$\frac{ds}{dt}$$

представит собой скорость точки в S; ведь известно, что эта дробь дает конечную величину. Следовательно, если обозначить скорость в S через v, то мы получим равенство

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

с помощью которого можно определить скорость для каждого заданного момента времени в любом месте пути.

Направление же движения повсюду будет совпадать с самой прямой линией AB.

Следствие 1

43. Если для отдельных элементов времени дана скорость тела v и, таким образом, установлено соотношение между t и v, то отсюда можно определить и пути s, пройденные за отдельные промежутки времени, пользуясь соотношением

$$ds = v\,dt,$$

интегрирование которого даст выражение для самого пути

$$s = \int v\,dt.$$

Следствие 2

44. Равным образом, если известна скорость v в отдельных точках пути или если дано соотношение между s и v, то отсюда определяется время t, в течение которого пройден путь s, с помощью диференциального уравнения

$$dt = \frac{ds}{v},$$

из которого получается

$$t = \int \frac{ds}{v}.$$

Следствие 3

45. Если движение равномерное, то скорость $\frac{ds}{dt}$ будет постоянной величиной; если положим последнюю равной c, то

$$ds = c\,dt,$$

а после интегрирования:

$$s = ct,$$

так как при $t = 0$ путь s тоже обращается в нуль.

Следовательно, и обратно, если соотношение между s и t таково, что из него для $\frac{ds}{dt}$ определяется постоянная величина, то движение равномерно.

Пояснение

46. Когда мы говорим, что по истечении времени t наша точка находится в S, то это выражение

допустимо лишь при условии, что мы от слова „находится“ отделяем понятие о пребывании и задержке. В просторечии выражение „находиться на каком-либо месте“ имеет обычно тот же смысл, что и „оставаться на месте“, вследствие чего приобретает наибольшую доказательную силу против существования вообще какого-либо движения следующий старый софизм: „Когда тело движется, то оно движется либо на том месте, где оно находится, либо на том, где оно не находится“. В действительности нельзя утверждать ни того, ни другого, и потому приходят к выводу, что тело вовсе не в состоянии двигаться. Первого, конечно, никак нельзя утверждать, если „на месте, где оно находится“, означает то же самое, что „на месте, где оно пребывает, т. е. покоится“. Если бы вместо слова „находится“ поставить слово „проходит“, то всякие затруднения были бы устранены, ибо там, где тело проходит, оно, без сомнения, передвигается. Однако указанное выражение кажется недостаточно сильным, чтобы одновременно оттенить существование тела, или точки, в тот момент, когда оно, или она, проходит через S; и в то же время понятие существования, примененное к любому месту, повидимому содержит в себе некоторый оттенок задержки, который совершенно чужд движению.

Поэтому, если мы не хотим этой терминологией устранить вообще возможность какого-либо движения в природе, то мы должны остерегаться того, чтобы с выражением „быть, находиться или существовать в определенном месте“ связывать представление о каком-либо „пребывании“. Я буду пользоваться этим выражением только в том смысле, что оно будет означать лишь прохождение через какое-либо место и не более того, — если, конечно, тело находится в движении.

Некоторые философы, пренебрегшие этим различием, составили себе совершенно превратные представления о движении. В самом деле, понимая движение как последовательное пребывание тела в различных местах, они приписывают ему и некоторую задержку в отдельных местах, откуда оно потом внезапно переходит на другие места. Если этим толкованием они стремятся избежать трудностей, которых они опасаются при „существовании без задержки на том же месте“, то им еще в гораздо большей степени следует опасаться указанных внезапных перескоков. В то время когда последний происходит, ведь они не могут указать, где в этот самый момент находится тело; и если бы существовало какое-либо основание для подобного мнения, то оно скорее послужило бы аргументом для отрицания всякого движения, чем доводом в пользу таких принципов, которые извращают природу движения.

Задача 2

47. *Точка движется по кривой линии, которая, однако, полностью лежит в одной плоскости.*

Свести общее определение движения к вычислениям пользуясь двумя координатами.

Решение

Ввиду того что тело, по отношению к которому рассматривается движение, считается неподвижным, мы можем считать неподвижной и плоскость, в которой лежит путь, проходимый точкой. В этой плоскости мы берем две произвольные оси OA и OB (рис. 3), наклоненные друг к другу под прямым или косым углом, и к ним будем относить движение, Пусть тогда ESF будет путь, описываемый точкой, а E — начальная точка движения. Все исследование сводится теперь к тому, чтобы указать на кривой место S, где будет находиться точка по истечении времени t.

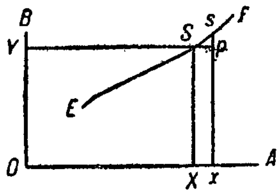

Рис. 3.

Обозначим весь путь, пройденный за этот промежуток времени, т. е. линию ES, через s, проведем из точки S две линии SY и SX, соответственно параллельные осям OA и OB, и назовем координаты $OX = SY = x$ и $XS = OY = y$. Если мы можем указать значения x и y для времени t, то мы знаем также и место S; кроме того, соотношение между x и y выразит и природу кривой ESF. Далее, если мы обозначим угол AOB, образуемый обеими осями, через ζ, то мы получим соответствующий элементу времени dt элемент пути

$$Ss = ds = \sqrt{dx^2 + 2\,dx\,dy\cos\zeta + dy^2},$$

откуда определится скорость в S, равная $\frac{ds}{dt}$. Для определения направления движения найдем угол, образуемый последним с осью OA; тангенс последнего равен $\frac{dy\sin\zeta}{dx + dy\cos\zeta}$, а синус равен $\frac{dy\sin\zeta}{ds}$. Если же требуется определить и угол, образуемый направлением, движения Ss с другой осью OB, то его тангенс равен $\frac{dx\sin\zeta}{dy + dx\cos\zeta}$, а синус равен $\frac{dx\sin\zeta}{ds}$ [48].

Следствие 1

48. Подобно тому как место S кривой определяется координатами $OX = x$ и $XS = y$, точно так же и следующее место s определяется из его элементов dx и dy, а именно, за промежуточек времени dt точка передвинется из S вдоль OA на отрезочек dx и вдоль OB на отрезочек dy.

Следствие 2

49. Это сложное перемещение вдоль отрезочков dx и dy воспроизводит действительное перемещение из S в s по отрезочку $Ss = ds$, определяя как самую величину его, так и его направление.

Следствие 3

50. Если бы движущаяся точка за промежуточек времени dt действительно прошла отрезочки dx и dy,

то соответствующие скорости были бы равны $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$.

Исходя из этих лишь воображаемых скоростей, можно определить не только истинную скорость на отрезочке $Ss = ds$, но также и ее направление.

Следствие 4

51. Если угол $AOB = \zeta$ между осями OA и OB будет прямой, то расчет крайне упрощается. В этом случае, значит, из элементов dx и dy определяется

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

а тангенс угла, образуемого направлением Ss с неподвижной прямой OA, равен

$$\frac{dy}{dx}.$$

Примечание 1

52. Приведенное выше рассуждение, согласно которому движение точки, проходящей за промежуточек времени dt отрезочек пути $Ss = ds$, мы представляем себе разложенным на два каких-то движения по направлениям OA и OB, является чисто геометрическим, так как в самом движении оно ничего не изменяет. Определяя скорости $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ этого сложного движения, мы достигаем того преимущества, что получаем возможность определить не только истинную

скорость движения $\frac{ds}{dt}$, но также и направление движения, что в большинстве случаев бывает очень полезно при вычислениях. Ведь скорость и направление представляют собой вещи, совершенно различные по своей природе, а между тем указанным путем мы можем и то и другое определить с помощью двух скоростей, т. е. с помощью величин однородных. Однако мы только в уме разлагаем движение точки для каждого элемента времени dt на два движения вдоль заданных направлений и приводим скорость каждого из них; мы делаем это не в силу того, будто точка фактически проделывает двойное движение, что, конечно было бы несообразно, но лишь потому, что подобное представление приводит нас к действительному познанию.

Изложенным выше приемом мы можем воспользоваться в том случае, когда каким-либо иным путем уже установлено, что движение точки должно происходить в одной и той же плоскости. Если же последнее неизвестно, тогда разложение следует произвести по каким-либо трем неподвижным осям. В этом случае представляется целесообразным разложить заданное движение на три движения, направленные параллельно этим осям.

Примечание 2

53. Описанное разложение движения, происходящего в одной плоскости, опирается на обычный метод, согласно которому кривые линии относят к

каким-либо двум осям, параллельно которым и проводят координаты. Но так как выбор этих прямолинейных осей зависит от нашего произвола, то ясно, что одно и то же движение в процессе вычисления может быть выражено на бесчисленное множество ладов. И хотя для любого времени как для скорости, так и для направления должны получиться одни и те же значения, — разложение движения является совершенно произвольным. Движение, при котором за промежуточек времени dt точка проходит отрезочек $Ss = ds$, может быть — по крайней мере, в уме — бесчисленными способами разложено на два движения, смотря по тому, будут ли в качестве осей приняты те или иные линии. Однако во всех случаях получается согласие в том отношении, что любые две скорости $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$, взятые вместе, как бы различны они ни были, всегда дают одну и ту же действительную скорость $\frac{ds}{dt}$, а также одно и то же направление, т. е. положение касательной, проведенной в S.

Это бесконечное многообразие, поскольку оно введено геометрией, не содержит в себе ничего такого, что должно вызывать удивление; но в то же время в каждом отдельном случае имеет большое значение тот или иной выбор осей координат, с тем чтобы возможно больше облегчить процесс вычислений.

Задача 3

54. *Описанный точкой путь не лежит в одной и той же плоскости. Свести к вычислениям общее определение движения, пользуясь тремя координатами*

Решение

Тело, по отношению к которому определяется движение и которое принимается неподвижным, дает

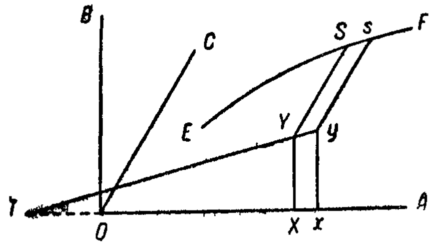

Рис. 4.

три неподвижных направления, которые простираются в длину, ширину и глубину. Так как выбор этих направлений предоставлен нашему произволу, то мы для облегчения вычислений выберем их так, чтобы они были взаимно перпендикулярны. Итак, пусть OA, OB и OC (рис. 4) будут три оси, из которых две первые пусть лежат в плоскости чертежа, а третью, OC, представим себе проведенной перпендикулярно к этой плоскости. Движущаяся точка описала линию ESF, расположенную каким-либо образом вне плоскости чертежа, и за время t она прошла по ней от E до S. Опустим из последней точки перпендикуляр SY на плоскость AOB, а из точки Y — перпендикуляр YX на ось OA. Пусть прямоугольные координаты будут $OX = x$, $XY = y$ и $YS = z$; они будут соответственно параллельны трем осям; два уравнения, связывающие между собой эти величины, определят природу кривой ESF, так что если можно будет указать их значения для времени t, то тем самым определится и место S, в котором тогда будет находиться движущаяся точка.

Если теперь обозначить пройденный за время t путь ES через s, то по диференциалам dx, dy и dz, соответствующим промежуточку времени dt, можно будет судить о величине элемента пути $Ss = ds$, пройденного точкой за этот промежуточек времени. А именно

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

а отсюда скорость движения в S будет равна $\frac{ds}{dt}$.

Что касается направления движения Ss, то оно определится тем же путем. В самом деле, если продолжить прямую линию yY до пересечения ее с прямой AO в точке T, то

$$XT = \frac{y\,dx}{dy};$$

если, далее, представить себе плоскость, проходящую через YT и перпендикулярную плоскости AOB, то на ней будет лежать элемент Ss; последний, будучи продолжен, образует с YT угол, тангенс которого равен $\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, а синус равен $\frac{dz}{ds}$. Далее, направление Ss образует с линией, проведенной через S параллельно AO, угол, косинус которого равен $\frac{dx}{ds}$, а с линиями, проведенными через S параллельно OB и OC, она образует углы, косинусы которых соответственно равны $\frac{dy}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$.

В изложенном содержится полное определение движения.

Следствие 1

55. Таким образом элемент пути Ss рассматривается здесь как диагональ параллелепипеда, ребра которого dx, dy и dz соответственно параллельны трем неподвижным осям. Из этих ребер диагональ $Ss = ds$ определяется таким образом, что

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

так как параллелепипед берется здесь прямоугольным.

Следствие 2

56. Обычно представляют себе, что пока движущаяся точка за промежуточек времени dt проходит элемент пути Ss, она перемещается по направлению, параллельному OA, на отрезочек dx, по направлению, параллельному OB, — на отрезочек dy и по направлению, параллельному OC, — на отрезочек dz.

Следствие 3

57. Если это сложное перемещение рассматривать, хотя бы только в уме, как действительное движение,

то $\frac{dx}{dt}$ дает выражение скорости движения по направлению OA, $\frac{dy}{dt}$ — скорости движения по направлению OB и $\frac{dz}{dt}$ — скорости движения по направлению OC.

Следствие 4

58. С помощью этих трех лишь воображаемых скоростей вычисляется не только действительная скорость в S, которая равна $\frac{ds}{dt}$, но и направление движения; с помощью же их интегралов определяется и все движение.

Примечание 1

59. Для сокращения вычислений я здесь принял, что три оси OA, OB и OC взаимно перпендикулярны, но их можно было бы, как и в предыдущем случае, предположить наклоненными друг к другу под любыми косыми углами. Однако природа косоугольных тел большинству обычно не настолько знакома, чтобы здесь можно было предположить, что их свойства достаточно известны по их элементам: поэтому, стремясь избежать сложных вычислений, мы будем впредь постоянно с полным правом применять прямоугольные оси.

Если бы, однако, последние были косоугольны, то, положив углы $AOB = \zeta$, $AOC = \eta$, $BOC = \theta$, и обозначив параллельные им координаты через x, y и z, мы с помощью более сложной формулы

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dx\,dy\cos\zeta + 2dx\,dz\cos\eta + 2dy\,dz\cos\theta}$$

выразили бы в очень неудобной форме элемент Ss, а также его положение, т. е. направление движения.

Примечание 2

60. Поскольку направление трех хотя бы взаимно перпендикулярных осей OA, OB и OC может быть изменено на бесчисленное число ладов, постольку и движение может быть представлено неограниченным количеством способов.

Даже в тех случаях, когда точка движется по прямой линии или по кривой, расположенной в одной плоскости, движение может быть представлено с помощью трех подобных осей, но, конечно, в этих случаях следует отдать предпочтение изложенным выше более простым способам.

Отсюда ясно, что одно и то же движение можно всегда бесчисленным количеством способов разложить на три движения, а установив для каждого из них соответствующую скорость, можно из их соединения определить не только действительную скорость движения точки, но также и направление этого движения; это оказывается чрезвычайно полезным для вычислений, так как этим путем устраняется необходимость в довольно неприятных исследованиях, касающихся кривизны описанного пути, а также и двоякой кривизны, — в том случае, когда движение происходит не в одной и той же плоскости. Названные три скорости, которые мы в уме считаем как бы сообщенными движущейся точке, облегчают все дело. Так как я в предыдущих частях механики не пользовался этим приемом, я там приходил к слишком запутанным вычислениям.

Ввиду того что подобное разложение движения, хотя бы и произведенное только в уме, представляет столь большую важность, оно заслуживает того, чтобы посвятить ему особое определение.

Определение 8

61. *Говорят, что движение разложено, если отрезочек, пройденный в течение элемента времени, рассматривается как диагональ параллелограма или параллелепипеда, стороны которого имеют заданные направления, и если точке приписывают одновременно два или три движения вдоль этих сторон с соответствующими скоростями.*

Примечание 1

62. Все, что мы здесь говорим о как бы элементарном движении по бесконечно малому отрезочку, можно перенести и на конечное движение, если только последнее является равномерным и прямолинейным. Вообще же мы ограничиваемся элементарным движением, так как только элемент кривой можно считать прямолинейным отрезочком, а движение на

нем равномерным. Для того же, чтобы сделать сказанное более понятным, я разъясню это применительно к конечному равномерному и прямолинейному движению, после чего уже будет чрезвычайно легко перейти к элементарному движению.

Пояснение 1

63. Предположим, что точка, равномерно двигаясь, за время t пройдет прямую линию SV (рис. 5), так что ее скорость будет равна $\frac{SV}{t}$, и представим себе построенный на SV произвольный параллелограм $SAVB$, диагональю которого является SV. Тогда мы можем мысленно разложить движение на два движения вдоль сторон SA и SB таким образом, что скорость первого равна $\frac{SA}{t}$, скорость второго равна $\frac{SB}{t}$, причем оба движения равномерны. Это сложное (двойное) движение с этими составляющими скоростями дает не только действительную скорость $\frac{SV}{t}$, но и действительное направление движения; поэтому, для того чтобы знать это движение, достаточно определения упомянутых двух составляющих скоростей. Не следует, однако, полагать, что подоб-

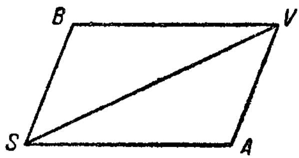

Рис. 5.

ное разложение имеет под собой какое-либо механическое основание: скорее можно считать достоверным, что больше чем одно движение в одной и той же точке существовать не может. Разложение это следует рассматривать как возникшее в результате чисто геометрических воззрений, как совершенно чуждое природе движения, введенное в механику только для облегчения вычислений.

Пояснение 2

64. Пусть движущаяся точка равномерно проходит за время t прямую линию SV (рис. 6), и это движение требуется разложить по трем направлениям. Проведем параллельно этим направлениям из обеих конечных точек S и V прямые линии SA, SB, SC и VP, VQ, VR и продолжим их настолько, чтобы каждая из них пересекла плоскость, которую мы представим себе проведенной на другом конце прямой через два других направления.

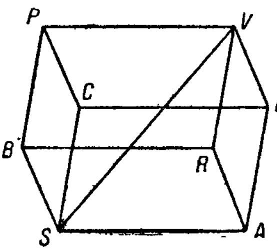

Рис. 6.

Таким образом получится параллелепипед, диагональю которого является SV, и движение по линии SV, скорость которого равна $\frac{SV}{t}$, мысленно разложится на три движения вдоль SA, SB и SC, скорости которых соответственно будут равны $\frac{SA}{t}$, $\frac{SB}{t}$ и $\frac{SC}{t}$. С помощью этих скоростей получается не только действительная скорость вдоль диагонали SV, но и направление движения по отношению к трем осям.

Аналогичным образом можно произвести разложение на три скорости, направленные по трем любым осям, и в том случае, когда SV представляет собой элемент любой кривой линии, пройденный в течение промежуточка времени dt.

Примечание 2

65. При изложенных выше определениях движения я следовал применяющемуся в геометрии методу, сводящемуся к тому, что природу кривых линий выражают двумя или тремя координатами, причем первое имеет место, когда кривая целиком лежит в одной плоскости, а второе — когда она не может расположиться в одной плоскости.

Этот метод в том виде, как он впервые выявился, привел нас к указанному замечательному разложению движения по двум или трем заданным направлениям, которое должно получить самое широкое применение во всей механике, так как наличие составляющих скоростей дает одновременно возможность установить направление движения и наклон, определение которых обычно служит источником немалых трудностей для вычислений.

Но так как в геометрии кривые линии, часто не без значительных упрощений для вычислений, относят к некоторой неподвижной точке, то представляется целесообразным аналогичным образом представить и разложение движения и притом не только в том случае, когда движение происходит в одной плоскости, но и в том случае, когда оно выходит за пределы одной плоскости.

Этот прием обычно применяют с большим успехом астрономы, определяя движение планет по отношению к какой-либо точке с помощью углов, описанных вокруг этой точки, и расстояний от последней; при этом, если движение происходит не в одной плоскости, то они принимают еще в расчет линию узлов и наклон орбиты к некоторой определенной плоскости. Поэтому, без риска выйти за пределы нашей темы, мы вкратце в общих чертах покажем здесь и этот способ интерпретации движения [49].

Задача 4

66. *Движение происходит в одной плоскости. Дать общее определение его с помощью углов, проведенных около определенной неподвижной точки.*

Решение

Пусть AS (рис. 7) будет путь, описываемый точкой в одной плоскости. Изберем в последней неподвижную точку O, — ту, которая представляется наиболее удобной для определения движения, и проведем из нее прямую линию OA к начальной точке движения; тогда движение будет вполне известно, если по истечении любого времени, равного t, когда точка будет находиться в S, можно определить еще угол $AOS = \varphi$ и расстояние $OS = z$. Отсюда определится природа кривой AS, а диференциалы дадут возможность найти как скорость, так и направление движения.

В самом деле, если точка за промежуточек времени dt пройдет от S до s, причем угол AOS получит приращение $SOs = d\varphi$, а расстояние OS — приращение $sp = dz$, то, положив всюду полный синус равным единице, мы получим

$$Sp = z\, d\varphi$$

и

$$Ss = \sqrt{dz^2 + z^2\, d\varphi^2}.$$

Отсюда скорость в S равна

$$\frac{\sqrt{dz^2 + z^2\, d\varphi^2}}{dt},$$

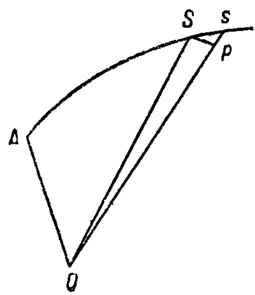

Рис. 7.

а направление определится по углу ASO или по углу Ssp, у которого тангенс равен

$$\frac{z\, d\varphi}{dz} [50].$$

Следствие 1

67. Так как движущаяся точка за время, равное t, описывает около O угол AOS и находится от этой точки на расстоянии $OS = z$, то ее движение можно

рассматривать как бы составленным из двух движений, одного — углового, около неподвижной точки O, и другого — прямолинейного, в результате которого точка удаляется или приближается к точке O.

Следствие 2

68. Так как за промежуточек времени dt угол $AOS = \varphi$ увеличивается на элемент $d\varphi$, то дробь

$$\frac{d\varphi}{dt}$$

выражает угловую скорость; так как, далее, dz представляет собой приращение расстояния $OS = z$, то дробь

$$\frac{dz}{dt}$$

выражает собой скорость удаления от точки O.

Следствие 3

69. Если известны обе эти скорости — как угловая скорость, так и скорость удаления, — то отсюда можно определить не только истинную скорость точки, но и ее направление, а сверх того, и самую кривую AS, описанную при движении точки.

Задача 5

70. *Точка движется не в одной плоскости. Выразить с помощью углов ее движение как по отношению к некоторой определенной плоскости, так и по отношению к некоторой заданной неподвижной точке на этой плоскости.*

Решение

Пусть плоскость чертежа представляет ту плоскость, к которой следует относить движение, и пусть на ней точка O (рис. 8) будет упомянутая неподвижная точка, которую можно принять как бы

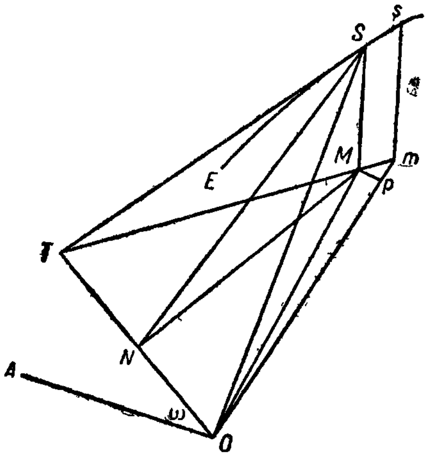

Рис 8.

за центр. Пусть точка движется каким-либо образом вне этой плоскости по линии ES и по истечении времени t доходит до S. Опустим из последней точки перпендикуляр SM на плоскость и проведем прямые линии MO и SO.

Пусть OA представляет собой избранное в данной плоскости неподвижное направление; тогда ясно, что к заданному времени t положение точки S

будет определено, если будут даны: 1) угол $AOM = \varphi$, 2) угол $MOS = \psi$ и 3) расстояние $OM = z$. Для того чтобы облегчить это определение, проведем в S к кривой касательную линию, которая пересечет неподвижную плоскость в точке T; если провести линию OT; то последняя явится линией пересечения плоскости, в которой точка теперь движется, с плоскостью, принятой в качестве неподвижной. Обычно линию OT называют линией узлов; для определения ее к рассматриваемому моменту времени служат угол $AOT = \omega$ и угол ϱ наклона плоскости OST к принятой плоскости. Если для какого-либо определенного момента времени, кроме угла $AOM = \varphi$ и расстояния $OM = z$, известны еще и эти два угла ω и ϱ, то легко может быть указано местоположение точки S, т. е. угол $MOS = \psi$ и расстояние $OS = \frac{z}{\cos \psi}$.

Проведем теперь из M перпендикуляр MN к прямой OT и прямую линию SN; так как угол $TOM = \varphi - \omega$, то

$$MN = z \sin(\varphi - \omega),$$

а

$$ON = z \cos(\varphi - \omega).$$

Далее, мы имеем угол $MNS = \varrho$, откуда

$$MS = z \sin(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho$$

и

$$NS = \frac{z \sin(\varphi - \omega)}{\cos \varrho};$$

следовательно,

$$OS = \frac{z}{\cos\varrho}\sqrt{\sin^2(\varphi-\omega)+\cos^2(\varphi-\omega)\cos^2\varrho}$$

или

$$OS = \frac{z}{\cos\varrho}\sqrt{1-\cos^2(\varphi-\omega)\sin^2\varrho}\ [51].$$

Теперь определяется и угол $MOS = \psi$ таким образом, что

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{MS}{OM} = \sin(\varphi-\omega)\operatorname{tg}\varrho.$$

Ввиду того что угол $AOT = \omega$ и угол наклона, равный ϱ, в такой же мере принадлежат и следующей точке s, в которой движущаяся точка очутится по истечении промежуточка времени dt, как и точке S, — то при диференцировании угла ψ элементы ω и ϱ можно считать постоянными величинами. Отсюда получается

$$\frac{d\psi}{\cos^2\psi} = d\varphi\cos(\varphi-\omega)\operatorname{tg}\varrho;$$

но, согласно общим правилам диференциального исчисления,

$$\frac{d\psi}{\cos^2\psi} = (d\varphi - d\omega)\cos(\varphi-\omega)\operatorname{tg}\varrho +$$
$$+\frac{d\varrho}{\cos^2\varrho}\sin(\varphi-\omega).$$

Из равенства этих величин получается

$$\frac{d\omega}{\operatorname{tg}(\varphi-\omega)} = \frac{d\varrho}{\sin\varrho\cos\varrho} = d\ln\operatorname{tg}\varrho.$$

Это уравнение дает отношение между мгновенным перемещением линии узлов OT и изменением угла наклона ϱ. Определив $MOS = \psi$ с помощью уравнения

$$\operatorname{tg} \psi = \sin (\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho,$$

можно получить и величину расстояния

$$OS = \frac{z}{\cos \psi}.$$

Следствие 1

71. Так как, согласно выведенному выше уравнению

$$\frac{d\omega}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)} = \frac{d\varrho}{\sin \varrho \cos \varrho},$$

углы ω и ϱ связаны один с другим, то ясно, что в тех случаях, когда угол $AOT = \omega$ не изменяет своей величины, угол наклона ϱ также всегда сохраняет свое значение; в этом случае, значит, движение точки происходит в одной и той же плоскости. Итак, критерий того, что движение происходит в одной и той же плоскости, проходящей через неподвижную точку O, заключается в том, что углы ω и ϱ должны быть постоянными.

Следствие 2

72. Пока движущаяся точка проходит по плоскости, принятой за неподвижную, она находится на самой линии узлов OT, и следовательно, тогда

$$\operatorname{tg} (\varphi - \omega) = 0;$$

поэтому как бы ни изменялся угол наклона ϱ, здесь будет иметь место равенство $d\omega=0$, т. е. линия узлов останется в покое.

Следствие 3

73. Если же угол $TOM=\varphi-\omega$ будет равен прямому, то, в силу того что $\operatorname{tg}(\varphi-\omega)=\infty$, как бы линия узлов ни двигалась, $d\varrho$ будет равен нулю, т. е. угол наклона за элемент времени dt не изменится.

Примечание

74. Если бы мы пожелали таким способом выразить элемент пути Ss и с его помощью — скорость движения, то формула оказалась бы слишком сложной; то же было бы и при определении направления движения.

Для устранения этого неудобства вычисление может быть произведено другим способом. А именно, для данного времени нужно найти положение линии узлов OT, т. е. угол $AOT=\omega$ и угол наклона $MNS=\varrho$, далее — угол $TOS=\sigma$ в плоскости TOS, в которой уже должно происходить движение точки, и наконец расстояние $OS=v$. При этих условиях получается:

$$ON=v\cos\sigma,$$
$$SN=v\sin\sigma,$$
$$SM=v\sin\sigma\sin\varrho$$

и

$$MN=v\sin\sigma\cos\varrho.$$

Отсюда определяется угол $SOM=\psi$, а именно

$$\sin\psi=\sin\sigma\sin\varrho.$$

Далее, так как

$$\operatorname{tg} TOM = \operatorname{tg} \sigma \cos \varrho,$$

а угол TOM равен $\varphi - \omega$, то диференциалы $d\omega$ и $d\varrho$ связаны один с другим таким образом, что мы имеем

$$\frac{d\omega}{\operatorname{tg} \sigma \cos \varrho} = \frac{d\varrho}{\sin \varrho \cos \varrho}$$

или

$$d\omega = \frac{d\varrho \operatorname{tg} \sigma}{\sin \varrho}.$$

После этого элемент пути определяется в следующем виде:

$$Ss = \sqrt{dv^2 + v^2 d\sigma^2},$$

а скорость равна

$$\frac{1}{dt} \sqrt{dv^2 + v^2 d\sigma^2},$$

направление движения Ss в плоскости TOS наклонено к прямой OS под таким углом, что его тангенс равен

$$\frac{v\, d\sigma}{dv}.$$

В астрономии, где подобное разложение очень часто применяется, угол TOS обычно называют *аргументом широты*, а угол SOM — *широтой*. Если же, далее, угол TOM, тангенс которого равен $\operatorname{tg} \sigma \cos \varrho$, прибавить к долготе узла $AOT = \omega$, то эту сумму, т. е. угол AOM, называют *долготой*.

Глава II

О ВНУТРЕННИХ НАЧАЛАХ ДВИЖЕНИЯ [52]

Определение 9

75. *Внутренние начала движения охватывают все то, что заключается в самих телах и в чем следует искать причину их покоя или движения.*

При этом исключаются все внешние причины, которые могут каким-либо образом повлиять на движение или покой тел.

Пояснение 1

76. После того как в предыдущей главе я изложил способ приводить исследование движения, взятого в общем виде, к вычислениям, я теперь предполагаю остановиться на вопросе о причинах движения. В самом деле, будет ли тело покоиться или двигаться, будет ли оно пребывать в покое или придет в движение и будет каким-либо образом продолжать

последнее, — эти явления необходимо должны быть последствиями каких-либо определенных причин. Несомненно, по отношению к покою и движению в теле ни в коем случае нельзя допустить, чтобы здесь что-либо могло происходить случайно, т. е. без всякой причины.

Но в чем бы ни состояла эта причина, она либо должна заключаться в самом теле, о котором идет речь, либо ее следует искать вне последнего.

Отсюда следует установить два рода начал, обусловливающих движение тел, из которых одни я буду называть *внутренними*, а другие — *внешними*. К *внутренним*, следовательно, я отношу все то, что заключается в самом теле и что является причиной движения или покоя; все же то, что воздействует на тело извне и влияет на его состояние движения или покоя, следует отнести к *внешним* началам. Но так как во вселенной все тела в каком-либо направлении соприкасаются с другими телами и, следовательно, находятся во взаимной теснейшей связи, то в этой связи трудно отделить друг от друга то, что должно быть отнесено к внешним и что к внутренним началам. Поэтому, для того чтобы при настоящем исследовании не сбиться с правильного пути, нам следует, по крайней мере в уме, удалить все окружающие тела; тогда налицо останется как бы в единственном числе только то тело, о котором идет речь.

Следует попытаться определить, как будет себя вести подобное тело, находясь в покое или же в движении, и отсюда определить внутренние начала движения, которые следует тщательно отличать от внешних.

Пояснение 2

77. Но, в то время как я собираюсь рассмотреть тело, изолированное указанным образом, стоящее вне какой-либо связи с другими телами и как бы существующее в единственном числе во вселенной, некоторые философы тотчас же воскликнут, что эта гипотеза содержит в себе противоречие: ведь все тела в мире настолько тесно связаны друг с другом, что с удалением одного из них все это цельное построение рушится.

Однако здесь вовсе не идет речь о том, чтобы изъять одно тело из вселенной, и, как бы ни влияла на какое-либо тело его связь с остальными телами, даже и философу не возбраняется поразмыслить над вопросом, что случилось бы с данным телом, если бы остальные тела на него совершенно не влияли. В этом случае философ не будет утверждать, что это действительно случится, он только установит, что из фактически происходящего следует приписать внешним причинам.

Философы постоянно прибегают к подобного рода абстракциям: если бы они вздумали их запретить, не осталось бы путей к познанию истины. Но если дозволено рассматривать какое-либо тело таким образом, как если бы оно совершенно не находилось под влиянием других тел, то ведь создается такое же точно положение, как если бы других тел совершенно не существовало. Следовательно, зачем же нужно рассматривать как существующие все прочие тела, кроме исследуемого, если они на него совершенно не влияют?

После этих соображений отпадают всякие препятствия к тому, чтобы рассматривать какое-либо тело как нечто вполне изолированное — совершенно так, как если бы были устранены все прочие тела вселенной.

Но если бы настоящая гипотеза кого-либо все-таки смущала, пусть он оставит все тела на своих местах, но согласится с нашим допущением, что от этих тел не исходит никакого влияния на то тело, которое мы собираемся исследовать.

Аксиома 1

78. *Всякое тело, взятое безотносительно ко всем прочим телам, находится либо в покое, либо в движении.*

Речь здесь идет об абсолютном покое и об абсолютном движении.

Пояснение 1

79. Опираясь на чувственное восприятие, мы до сих пор не знали другого вида покоя или движения, как только по отношению к другим телам, почему мы и назвали как покой, так и движение относительными.

Теперь, если мы мысленно устраним все тела, кроме одного, то исчезнет и связь последнего с другими телами, с помощью которой мы до сих пор судили о покое или движении; тогда прежде всего возникает вопрос: может ли и теперь иметь место наше суждение о движении или покое, или же нет? Ведь это суждение составлялось у нас исключительно в результате сопоставления положения рассматриваемого тела с другими телами; следовательно, с устранением этих последних и наше суждение по необходимости должно отпасть. Но хотя о покое или о движении какого-либо тела мы узнаем только по его отношению к другим телам, отсюда еще нельзя делать того вывода, что эти вещи сами по себе представляют собой не больше чем чисто умозрительное отношение и что в самих телах не содержится решительно ничего такого, что соответствовало бы нашим понятиям покоя и движения.

Ведь и размеров тела мы не можем узнать иначе, как путем сравнения его с другими телами. Но если даже удалить предметы, с которыми мы произвели сравнение, в теле все-таки останется как бы основа его размеров, так как если оно расширится до большего объема или сожмется до меньшего, то придется считать, что в нем произошло некоторое реальное изменение. Точно так же, если бы существовало одно единственное тело, то пришлось бы считать, что оно либо находится в покое, либо движется, так как нельзя предположить, чтобы одновременно могло быть и то и другое или чтобы не было ни того, ни другого. Отсюда я прихожу к заключению, что движение и покой не представляют собой чего-либо чисто идеального, возникающего только из сравнения, так что в самих телах не заключается ничего, соответствующего им, но что и в случае единственного изолированного тела можно поставить вопрос, находится ли оно в движении или в покое. При этом я меньше всего опасаюсь тех философов, которые все сводят к отношениям, так как они приписывают движению столь многое, что даже в движущей силе признают некую субстанцию.

Пояснение 2

80. Итак, если и по поводу отдельного тела, взятого без всякой связи с другими телами или же при полном удалении последних, можно с полным основанием поставить вопрос, находится ли оно в покое или же оно движется, то необходимо принять либо одно, либо другое. Каковы же должны быть этот покой или это движение? Так как здесь не происходит изменения положения по отношению к другим телам, мы этого не в состоянии себе представить без того, чтобы допустить существование абсолютного пространства, в котором наше тело займет определенное место, откуда оно и будет переходить в другие места. Но так как, по мнению тех самых философов, которые наиболее сильно возражают против существования абсолютного пространства, максималь-

ное значение придается тому, находится ли тело в движении или в покое, то пусть они укажут безотносительно к другим телам, в чем собственно здесь заключается различие. Станут ли они утверждать, что движется именно то тело, которое постоянно меняет свое место по отношению к соседним телам? Но ведь движением могут обладать как раз эти последние, в то время как первое тело будет находиться в покое. Придется ли им произвести сопоставление с более удаленными телами? Но, во-первых, с какими? И почему с одними предпочтительнее, чем с другими?

Наконец они ответят: с такими телами, которые сами по себе находятся в покое. Но тогда я снова ставлю вопрос, если не о том, каким образом мы можем отличать тела, находящиеся сами по себе в покое, то о том, что это собственно значит: „тело само по себе находится в покое“? Ведь дело в том, что здесь мы уже лишены возможности прибегнуть к определению положения тела по отношению к другим телам.

В конце концов они будут вынуждены признать, что сами по себе находятся в покое те тела, которые пребывают в одном и том же месте пространства, а так как из этой формулировки совершенно устранена связь с другими телами, они и придут к абсолютному пространству, по отношению к которому пребывают в покое или же движутся те тела, которые мы считаем находящимися в абсолютном покое или в абсолютном движении.

Примечание

81. Всякий, кто склонен отрицать существование абсолютного пространства, придет в величайшее смущение. В самом деле, вынужденный отбросить абсолютный покой и движение как пустые слова, лишенные смысла, он должен будет не только отбросить законы движения, покоящиеся на этом принципе, но и допустить, что вообще не может быть никаких законов движения.

Ведь если вопрос, который нас привел к этому, — *что происходит в теле, освобожденном от какой-либо связи с прочими телами?* — сам по себе абсурден, то и влияния, которые могут быть вызваны в данном теле другими телами, сами по себе неизвестны и не могут быть определены: пришлось бы утверждать, что все происходит случайно и без всякой причины.

Если бы кто-нибудь захотел этого избежать, то он должен был бы отрицать всякое движение. Однако и на этом он ни в коем случае не мог бы успокоиться, если бы даже им были удачно отражены все доводы, которые были бы приведены против него: он не мог бы даже объяснить, что собственно представляет собой принятый им во всем мире покой.

То обстоятельство, что мы вынуждены спорить с подобными явными нелепостями, представляет собой, повидимому, самое надежное обоснование для нашего мнения.

Аксиома 2

82. *Абсолютно покоящееся тело, если оно не подвержено каким-либо влияниям извне, будет оставаться в состоянии покоя вечно.*

Пояснение

83. Это положение обыкновенно формулируется применительно к любому телу. Оно само по себе кажется настолько ясным, что как-будто и не нуждается в каком-либо доказательстве. Однако, для того чтобы еще яснее убедиться в его правильности, рассмотрим точку или элемент тела. Если последний в некоторый момент времени находится в состоянии абсолютного покоя, то он в этом состоянии должен оставаться вечно. В самом деле, ведь нет никакого основания, в силу которого он скорее стал бы двигаться в одном направлении, чем во всех остальных направлениях. А так как действие каких бы то ни было внешних сил здесь исключено, то он и не сможет двигаться ни в каком направлении. Хотя, таким образом, настоящая истина опирается на принцип достаточного основания, тем не менее следует признать, что в самой точке или в элементе тела имеется причина, благодаря которой она или он пребывает в состоянии покоя, так что настоящую истину следует признать необходимой.

Но то, что доказано для любой точки, неизбежно имеет силу и для всех точек, вместе взятых, и, следовательно, для любого тела: ведь если отдельные элементы последнего находятся в покое и сохраняют это состояние в дальнейшем, то никто не может усомниться, что и все тело будет оставаться в покое.

Однако по поводу целого тела может возникнуть сомнение в том, не воздействуют ли друг на друга отдельные, хотя бы и покоящиеся части тела и не вызовут ли они движения? Но если даже допустить последнее, то отсюда еще не следует ничего такого, что противоречило бы нашей аксиоме, поскольку мы освобождаем от всякого внешнего влияния не только все тело в целом, но и отдельные части его. Для нас достаточно, чтобы была принята аксиома в указанном смысле, а именно, что все находящиеся в покое мельчайшие частицы тела, поскольку они друг на друга не воздействуют, будут пребывать и дальше в состоянии покоя.

Примечание

84. Настоящий закон, установленный применительно к абсолютному покою, ни в коем случае не может быть распространен и на относительный покой. Действительно, если тело, по отношению к которому рассматриваемое тельце находилось в покое, получит внезапный толчок, то второе тело уже не останется в покое по отношению к первому телу. Представьте себе шар, который лежит на столе на равномерно движущемся корабле и который находится в состоянии покоя по отношению к кораблю. Если послед-

ний ударится о скалу, то относительный покой шара внезапно прервется и шар начнет двигаться по отношению к кораблю, хотя он не подвергся действию каких-либо внешних причин. Следовательно, приведенный закон ограничивается исключительно только абсолютным покоем.

Поскольку закон этот является необходимым, постольку и отношение тел к любым занимаемым ими местам тоже является необходимым.

Так как этот закон о покое говорит о пребывании на одном и том же месте, то под последним следует подразумевать только абсолютное место; однако это абсолютное место не может быть определено на основании взаимного расположения находящихся по соседству тел, так как в противном случае мы распространили бы свой закон и на случай относительного покоя.

Аксиома 3

85. *Тело, находящееся в абсолютном движении, если оно не подвергается какому-либо внешнему воздействию, будет продолжать двигаться равномерно в том же самом направлении.*

Пояснение 1

86. Эту аксиому тоже следует считать правильной в применении к мельчайшим частицам тел, уподобляющимся точкам: она применима только к таким имеющим конечную величину телам, у которых все частицы движутся с одной и той же скоростью в

одном и том же направлении. Действительно, если бы они вначале приобрели неравные скорости или различные направления, то отдельные частицы не могли бы сохранить своего движения, так как в противном случае они отдалились бы друг от друга и цельность тела была бы нарушена. Но этого не приходится опасаться в том случае, когда скорости и направления движения всех частиц тождественны или когда тело столь мало, что в нем не может иметь места подобное неравенство. Поэтому принимают, что подобная телесная точка существует как бы изолированно и, получив некоторое движение, начинает двигаться с заданной скоростью и в заданном направлении; тогда, согласно приведенной аксиоме, она постоянно будет сохранять одну и ту же скорость и одно и то же направление.

Хотя мы это положение приняли в качестве аксиомы, тем не менее его можно без труда и обосновать.

Прежде всего тело не претерпит никакого изменения в направлении своего движения, так как нет никакого основания, почему бы оно от него отклонилось скорее в одну сторону, чем в другую; следовательно, как достоверно то, что покоящееся тело сохраняет свое состояние покоя, так столь же достоверно и то, что тело движущееся сохраняет свое направление.

Что же касается, дальше, скорости, то, если бы она не оставалась постоянно одной и той же, она должна была бы либо увеличиться, либо уменьшиться. Однако ни того, ни другого нельзя утверждать без противоречия здравому смыслу. В самом деле, если бы скорость увеличилась или уменьшилась, то это должно было бы произойти согласно определенному закону, но каков этот закон — этого нельзя себе никак представить, так как ни один закон не имеет за собой каких-либо преимуществ перед другими. Далее, если бы кто-либо вздумал утверждать, что скорость будет уменьшаться пропорционально времени, то этим он еще не выяснил бы вопроса: ему пришлось бы, сверх того, определить, какая часть скорости исчезает в тот или иной промежуток времени, но какие бы предположения по данному поводу он ни сделал, их ни в коем случае нельзя было бы принять, так как они не имели бы под собой никаких оснований. То же самое относится и к любому иному закону.

Таким образом не остается ничего иного, как допустить, что и скорость, подобно направлению, останется все время неизменной.

Пояснение 2

87. Настоящей аксиоме, равно как и предыдущей, противоречит мнение тех философов, которые утверждают, что всем телам присуща какая-то скрытая сила, дающая им возможность постоянно изменять состояние покоя или движения. Однако это мнение не имеет под собой ровно никаких оснований и

совершенно опровергается уже одним тем, что оно противоречит нашей аксиоме.

Эта аксиома с первого взгляда как-будто идет вразрез с наблюдением, так как при всех испытаниях мы устанавливаем, что движение тел постепенно замедляется и наконец прекращается. Повидимому, отсюда и возникло отрицание возможности вечного движения, между тем как, согласно нашей аксиоме, должно иметь место вечное движение.

Но в упомянутых опытах причина замедления заключается в трении, в сопротивлении воздуха и в других помехах движению, которых невозможно устранить никакими средствами. Внимательно продумав эти обстоятельства, мы как раз из этих опытов сделаем тот вывод, что если бы все названные помехи были устранены, то движение действительно могло бы продолжаться вечно.

И так как мы в своей аксиоме определенно исключили все помехи движению, то упомянутые опытные данные, конечно, уже не противоречат аксиоме, а скорее, наоборот, представляют заметный довод в ее пользу.

Следует остерегаться настоящую аксиому, приуроченную исключительно к абсолютному движению, применять к каким-либо относительным движениям.

Определение 10

88. *Когда тело абсолютно находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, то говорят, что оно сохраняет свое состояние.*

Следствие 1.

89. Следовательно, обе приведенные выше аксиомы могут быть выражены следующим образом: если тела не находятся под влиянием других тел, то они „сохраняют свое состояние“.

Следствие 2

90. Следовательно, если тело, находившееся раньше в покое, приходит в движение или если тело, находившееся в движении, претерпевает изменение в своей скорости или направлении, то это значит, что тело „изменяет свое состояние“.

Примечание

91. Пребывание в покое или в равномерном и прямолинейном движении вполне правильно названо „состоянием“, так как этим тело определяется само по себе, независимо от чего-либо другого. Действительно, пока тело предоставлено самому себе и не подвержено какому-либо внешнему воздействию, с полным основанием говорят, что оно остается в неизменном состоянии, поскольку наличие изменения состояния должно свидетельствовать о внешнем воздействии.

Пребывание в том же состоянии совершенно отличается от пребывания в том же месте; эти понятия совпадают лишь в том случае, когда тело находится в покое. К данному понятию состояния нас привели установленные выше аксиомы; обратно, понятие состояния, которое само по себе является произвольным, не могло бы нас привести к познанию наших аксиом. Как раз благодаря этим последним понятие состояния и получило определенный смысл.

Определение 11

92. *То свойство тел, в котором заключается причина сохранения ими своего состояния, называется инерцией, иногда также силой инерции.*

Следствие 1

93. Инерция представляет собой истинную причину, вследствие которой тела сохраняют неизменным свое состояние; поскольку эту причину приходится искать в самом теле, ее, без сомнения, следует считать свойством, общим для всех тел.

Следствие 2

94. Следовательно, если задают вопрос, почему абсолютно покоящееся тело продолжает оставаться в покое или почему тело, движущееся равномерно и прямолинейно, сохраняет это движение, — то нельзя указать какой-либо иной причины, кроме его инерции: не следует искать причины этого явления где-либо вне самого тела.

Примечание

95. Выражение „инерция“ применяется собственно для обозначения тех свойств тел, в силу которых покоящиеся тела остаются в состоянии

покоя, так как в этом состоянии они как бы противодействуют движению; но так как тела, находящиеся в движении, точно так же противодействуют всякому изменению скорости и изменению направления, то упомянутое выражение применяется для обозначения сохранения всякого состояния, будет ли последнее покоем или движением.

Иногда применяют выражение „сила инерции", так как сила есть нечто, противодействующее изменению состояния. Но если под силой понимать какую-то причину, изменяющую состояние тела, то здесь ее нужно понимать совсем не в этом смысле: проявление инерции в высшей степени отлично от того, какое свойственно, как это будет показано ниже, обычным силам. Поэтому для избежания какой-либо путаницы на этой почве мы опустим слово „сила" и будем рассматриваемое свойство тел называть просто *инерцией*.

Пояснение

96. Об инерции можно говорить только для случаев абсолютного состояния тел; ее нельзя относить к относительному покою или движению. В самом деле, какое-либо тело может по отношению к другому находиться в любом неравномерном движении или перемещаться по кривой линии, между тем как абсолютно оно будет находиться в покое или в равномерном и прямолинейном движении и, следовательно, будет сохранять свое состояние. И если нам случится

наблюдать тело, которое, как нам достоверно известно, не подвержено никаким внешним силам, но которое проделывает любое неравномерное относительное движение, то мы с полной определенностью можем утверждать, что абсолютно это тело либо находится в покое, либо движется равномерно прямолинейно. Но так как покой или движение тел мы в состоянии узнать лишь по сопоставлению их с другими телами, то чувства никак не могут нам указать абсолютного состояния тел. Поэтому критерий абсолютного состояния, выводимый нами из того обстоятельства, что тела не подвержены никакому внешнему воздействию, имеет величайшее значение в данной науке.

Может, впрочем, случиться, что настоящая аксиома окажется применимой и при относительном движении: это имеет место в том случае, когда тело, по отношению к которому мы определяем движение, само сохраняет свое состояние, т. е. либо находится в абсолютном покое, либо абсолютно движется равномерно и прямолинейно.

Теорема 1

97. *Если тело, по отношению к которому мы определяем движение других тел, абсолютно находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, то аксиомы имеют такую же силу и для относительного покоя или движения, как и для абсолютного.*

Доказательство

Рассмотрим два тела, которые оба находятся в абсолютном равномерном и прямолинейном движеиии; одно из них (рис. 9) пусть проходит за время, равное t, путь

$$Aa = at,$$

а второе — за то же время путь

$$Bb = bt,$$

так что скорость первого равна a, второго равна b. При этом безразлично, лежат ли прямые Aa и Bb в одной плоскости или же нет.

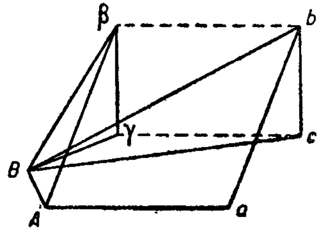

Рис. 9.

Отнесем теперь движение тела B к телу A, которое мы будем считать как бы находящимся в покое в A; так как вначале тело B находилось в B, то по истечении времени, равного t, его можно будет считать как бы находящимся в β, при условии, что линия $A\beta$ параллельна и равна ab. Но, принимая во внимание, что

$$b\beta = Aa = at,$$

мы имеем

$$Bb : b\beta = b : a,$$

т. е. отношение $Bb : b\beta$ постоянно.

Дальше, так как угол $Bb\beta$ постоянно сохраняет одно и то же значение, то вид треугольника $Bb\beta$

является вполне определенным, а следовательно, и угол $bB\beta$ является постоянным и не зависит от времени, равно как и отношение Bb к $b\beta$. Положив последнее равным отношению b к β, мы получим

$$B\beta = \beta t.$$

Отсюда следует, что относительное движение тела B таково, что оно из точки B движется по прямой $B\beta$ и проходит за время t путь

$$B\beta = \beta t,$$

т. е. это тело перемещается с постоянной скоростью.

Итак, тело B, которое мы предположили находящимся в абсолютном равномерном и прямолинейном движении, движется по отношению к телу A также равномерно и прямолинейно, если только последнее тело само движется равиомерно и прямолинейно.

Следствие 1

98. Если положить угол $Bb\beta$ равным ζ и принять во внимание, что этот угол имеет постоянное значение, то даже если линии Aa и Bb и не лежат в одной плоскости, мы во всяком случае будем иметь

$$B\beta = t\sqrt{a^2 - 2ab\cos\zeta + b^2}.$$

Следовательно, скорость относительного движения будет равна

$$\sqrt{a^2 - 2ab\cos\zeta + b^2},$$

а тангенс угла $bB\beta$ равен

$$\frac{a\sin\zeta}{b - a\cos\zeta}.$$

Следствие 2

99. Если бы тело A находилось в абсолютном покое, то относительное движение тела B не отличалось бы от абсолютного его движения. Следовательно, если бы во вселенной существовало одно единственное абсолютно покоящееся тело, то, относя к последнему остальные тела, можно было бы определять их абсолютное движение.

Следствие 3

100. Если бы во вселенной существовало тело, движущееся равномерно и прямолинейно, к которому можно было бы относить все остальные тела, то по поводу последних, при условии, что они не были бы подвержены какому-либо внешнему воздействию, можно было бы утверждать, что они сохраняют и свое относительное состояние.

Следствие 4

101. Таким образом тела вследствие инерции стремятся сохранить не только свое абсолютное, но и относительное состояние, если только то тело, по отношению к которому определяется их состояние, само находится в абсолютном покое или в абсолютном равномерном и прямолинейном движении.

Пояснение

102. Если бы во вселенной Солнце или, еще лучше, центр Солнца находился в абсолютном покое и если

бы положение всех тел сопоставлялось с ним, то в силу инерции все тела, которые по отношению к этому центру находились бы в покое, и впредь оставались бы в этом состоянии, а те тела, которые двигались бы, продолжали бы перемещаться равномерно и прямолинейно. Таким образом в этом случае их абсолютное движение не отличалось бы от относительного. Если же в покое находился бы не центр Солнца, а—что, вероятно, ближе к действительности, — общий центр тяжести всей системы, то изложенное выше свойство инерции следовало бы отнести к этому центру тяжести.

Однако для определения относительного движения недостаточно принять в качестве неподвижной одну единственную точку, так как с помощью последней можно определить лишь расстояния, но не направления; как выше нами было указано, для этого необходимо иметь три или даже четыре неподвижных точки. В качестве таких неподвижных точек в мировом пространстве обыкновенно принимаются неподвижные звезды. Если правильно предположение о неподвижности звезд, то все тела, которые по отношению к ним находятся в покое или в движении, сохраняли бы в силу инерции это свое состояние.

То же самое имело бы место, если бы все звезды двигались в небесном пространстве равномерно и прямолинейно с равными скоростями по параллельным направлениям. Однако и у самих звезд замечены некоторые небольшие неправильности, которые следует принимать во внимание при подобного рода суждениях, что, конечно, в очень большой степени осложняет данный вопрос.

Примечание

103. Когда мы рассматриваем такие тела или, — чтобы размеры тел не вносили осложнения, — когда мы рассматриваем как бы материальные точки, которые совершенно не подвержены внешнему воздействию, то последние либо будут вечно находиться в покое, либо будут вечно двигаться равномерно прямолинейно и притом не только абсолютно, но и относительно, если только тело, к которому мы их относим, само сохраняет свое абсолютное состояние. Поэтому представляется целесообразным внимательнее исследовать подобное движение, являющееся результатом инерции, и свести его к вычислениям.

Ранее мы в общем виде разобрали три случая, для которых были указаны вычисления для определения движения. Первый случай был тот, когда прямолинейное движение было отнесено к оси, совпадающей с направлением движения. Второй, — при котором движение было отнесено к двум осям, и так как последний оказался применимым к любому движению, происходящему в одной плоскости, то мы его сможем применить и к прямолинейному равномерному движению, являющемуся теперь предметом нашего исследования. Третий случай, являющийся самым широким по своему охвату, при котором мы применили три оси, охватывает и настоящий рассматриваемый нами вопрос; поэтому нам представляется вполне целесообразным уделить некоторое внимание тому, чтобы исследовать, какой вид примут выведенные раньше общие формулы в случае равномерного прямолинейного движения.

Итак, мы равномерное прямолинейное движение сведем к вычислениям применительно к этим трем случаям и определим, что в каждом движении должно быть отнесено за счет инерции. В том же случае, когда будет установлено, что движение какого-либо тела происходит как-нибудь иначе, причину этого придется искать не в его инерции, а где-нибудь вне данного тела.

Задача 6

104. *Прямолинейное равномерное движение отнесено к одной оси, совпадающей с направлением движения. Определить движение путем вычислений, т. е. указать местонахождение тела в любое время.*

Решение

Будем рассматривать движущееся тело как точку. Пусть начало движения будет в A (рис. 2) и пусть по истечении времени t точка достигнет S, пройдя путь $AS=s$. Так как скорость движения в S равна $\frac{ds}{dt}$, и последняя все время остается неизменной, то, положив последнюю равной c, будем иметь

$$\frac{ds}{dt}=c,$$

а после интегрирования

$$s = ct,$$

т. е. ту самую формулу, которая уже раньше была дана для равномерного движения.

Но для того чтобы представить особенности данного движения в общем виде безотносительно к величине его скорости, достаточно знать, что $\frac{ds}{dt}$ есть величина постоянная, вследствие чего ее диференциал должен быть равен нулю. Следовательно, если рассматривать элемент времени dt как величину постоянную, то получается $d\frac{ds}{dt} = 0$, а следовательно, если это выражение для однородности пополнить, то

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0.$$

Следствие 1

105. Следовательно, если при прямолинейном движении

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0,$$

то это движение является также и равномерным; при этом, если оно абсолютное или если оно равносильно абсолютному, то уравнение

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0$$

является результатом инерции.

Следствие 2

106. Но если при прямолинейном движении не имеет места соотношение

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0,$$

то это значит, что тельце подчиняется не только инерции, и самое значение величины $\frac{d^2s}{dt^2}$ следует приписать какой-либо внешней причине, поскольку, конечно, движение рассматривается как абсолютное движение.

Задача 7

107. *Точка движется равномерно по прямой линии, и ее движение отнесено к двум осям, лежащим в одной плоскости. Установить особенности этого движения, сведя их к вычислениям.*

Решение

Пусть описываемый точкой путь представляет собой прямую линию EF (рис. 3), лежащую в одной плоскости с осями OA и OB, и пусть по истечении времени t точка находится в S.

Проведем из этой точки параллельно осям линии SY и SX и положим

$$OX = x \quad \text{и} \quad XS = y.$$

Так как линия ESF прямая, то $\frac{dy}{dx}$ представляет собой постоянную величину.

Далее, по истечении промежуточка времени dt движущаяся точка достигнет s; тогда, если положить

$$Xx = Sp = dx \quad \text{и} \quad ps = dy$$

и, кроме того, угол AOB обозначить через ζ, то мы получим

$$Ss = \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2\,dx\,dy\cos\zeta}$$

и скорость в S, равную

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + 2dx\,dy\cos\zeta}}{dt}.$$

Но так как $\frac{dy}{dx}$ — величина постоянная, то, положив

$$dy = a\,dx,$$

мы получим для скорости значение

$$\frac{dx}{dt}\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\zeta},$$

которое, согласно принятому условию, тоже представляет собой постоянную величину. Поэтому

$$\frac{dx}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt}$$

будут также величинами постоянными, а их диференциалы будут равны нулю.

Итак, в том случае, если движение прямолинейно и равномерно, то при постоянном элементе dt получается

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

и

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Обратно, если последние два уравнения имеют место, то $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$, а также $\frac{dy}{dx}$ представляют собой величины постоянные, откуда следует, что движение происходит равномерно и прямолинейно.

Следствие 1

108. Следовательно, если точка не испытывает никакого внешнего воздействия и движение ее происходит только в силу инерции, то обязательно должны иметь место уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

и

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

так как этими условиями характеризуется прямолинейное равномерное движение.

Следствие 2

109. Поэтому, если равномерное прямолинейное движение разложить по направлениям двух осей OA и OB, то скорости обоих составляющих движений будут постоянны, и наоборот, если эти составляющие движения равномерны, то и действительное движение будет не только равномерным, но и прямолинейным.

Следствие 3

110. Следовательно, и наоборот, если при каком-либо движении, отнесенном к осям OA и OB, не имеет места равенство

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

или не имеют места оба эти равенства, то это значит, что тело находится не только под действием инерции, но что на него действует еще и какое-то внешнее влияние.

Примечание

111. Когда тело, подчиняясь только действию инерции, движется равномерно и прямолинейно, — будь то абсолютно или относительно такого тела, которое само находится в таком же абсолютном состоянии, — то его движение может быть разложено по двум произвольным осям, что, конечно, может быть сделано бесчисленным множеством способов. Оба составляющих движения будут в этом случае всегда равномерными, т. е. они будут такими, как если бы тело в них участвовало в силу инерции.

Замечательная особенность этого разложения заключается в том, что основные положения, связанные с действительным движением, сохраняют силу и для этих, хотя и фиктивных, составляющих движений, из чего могут быть извлечены максимальные удобства для вычислений.

Еще большая важность этого разложения выяснится ниже, когда нами будет показано, что на эти движения, полученные из разложения и по существу лишь воображаемые, силы влияют совершенно так же, как если бы они были действительными.

Все изложенное выше в общем сохраняет силу и при разложении движения по трем осям, как мы в этом убедимся из нижеследующей задачи.

Задача 8

112. *Точка движется равномерно по прямой линии, и ее движение отнесено к трем осям. Установить особенности этого движения, сведя их к вычислениям.*

Решение

Примем в качестве осей линии OA, OB и OC (рис. 4). Пусть ESF — произвольная прямая линия, проходимая точкой при равномерном движении, и пусть по истечении времени t точка находится в S, для которой координаты, параллельные трем осям, будут $OX = x$, $XY = y$ и $YS = z$, причем последние могут образовать друг с другом прямые или косые углы. Так как ESF — прямая линия, то и ее проекция TY на плоскость AOB будет прямой, и следовательно, $\frac{dy}{dx}$ будет величиной постоянной.

Аналогично, ввиду того что проекция на плоскость AOC также дает прямую линию, $\frac{dz}{dx}$ будет тоже постоянной величиной. То же можно сказать и о величине $\frac{dz}{dy}$. Обозначив отрезочек пути Ss, пройденный за промежуточек времени dt, через ds, мы найдем, что величины $\frac{ds}{dx}$, $\frac{ds}{dy}$ и $\frac{ds}{dz}$ будут тоже постоянны; последнее является результатом того, что ESF представляет собой прямую линию. Вследствие равномерности движения скорость $\frac{ds}{dt}$ постоянна, а потому и $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ будут величинами постоянными. В последнем как раз и содержатся как условие равномерности движения, так и условие прямолинейности пути.

Продиференцировав последние отиошения, — приняв dt за величину постоянную, — мы получим следующие три уравнения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

этими уравнениями и определяется природа равномерного прямолинейного движения.

Следствие 1

113. Следовательно, если точка не подвержена какому-либо внешнему воздействию, то при отнесении ее абсолютного движения к каким-либо трем

осям обязательно будут иметь место три следующих равенства:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=0,$$

основу которых следует искать в инерции тельца.

Следствие 2

114. Если движение равномерно и прямолинейно, то при разложении последнего по трем произвольным неподвижным осям три составляющих движения тоже будут равномерными, так как $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ — величины постоянные.

Следствие 3

115. Итак, хотя при абсолютном движении составляющие движения, которые получаются при разложении его по трем неподвижным направлениям, и являются воображаемыми, все же они следуют закону инерции, так что мы можем в настоящей главе рассматривать их как движения действительные.

Примечание

116. Таковы внутренние начала движения, проистекающие из общего свойства, именуемого обычно *инерцией*. С помощью этих начал мы в состоянии определить движение материальных точек, когда последние не подчинены никакому внешнему влиянию. А именно здесь все сводится к тому, что когда

подобное тельце находится в покое, оно вечно сохраняет это состояние покоя; если же оно пришло в какое-либо абсолютное движение, то оно продолжает вечно двигаться прямолинейно с той же скоростью.

Хотя движущиеся тела мы рассматривали здесь как тела бесконечно малые, однако все то, что выше было изложено, может быть применено и к телам любого размера. Но раньше чем перейти к этому, нам необходимо обсудить, какое действие в состоянии произвести внешние силы. Это исследование мы произведем тоже применительно к точкам, т. е. к очень малым телесным частицам.

Глава III

О ВНЕШНИХ ПРИЧИНАХ ДВИЖЕНИЯ, т. е. О СИЛАХ

Определение 12

117. *Все, что способно изменять абсолютное состояние тела, называется силой* [53].

Так как под влиянием внутренних причин тело должно было бы сохранять свое состояние, силу следует считать внешней причиной.

Следствие 1

118. Причина, вследствие которой абсолютно покоящееся тело начинает двигаться или же тело, находящееся в абсолютном движении, изменяет свою скорость либо направление, называется силой.

Следствие 2

119. Сила является внешней причиной, которая в состоянии изменить абсолютное состояние тела;

до тех пор, пока не возникнет подобная внешняя причина, тело сохраняет свое абсолютное состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения.

Пояснение

120. В самом теле не существует ничего такого, что стремилось бы изменить его состояние; поэтому-то мы и утверждаем, что тело до тех пор сохраняет свое состояние, пока оно как бы следует собственному инстинкту и не подпадает под действие какого-либо внешнего фактора.

Следовательно, когда случается, что абсолютное состояние какого-либо тела изменяется, причину этого следует искать, конечно, не в самом теле; ведь в противном случае не могло бы произойти никакого изменения состояния, так как состояние мы именно определили таким образом, что тело сохраняет его до тех пор, пока оно не подвержено действию каких-либо внешних причин. Но той внутренней причиной, вследствие которой тело сохраняет свое состояние, является его инерция, и так как в последней содержится источник всего того, что касается покоя и движения, то, в случае если бы в теле содержалось что-либо такое, что стремилось бы изменять его состояние, — инерция не только была бы совершенно сведена на-нет, но ее никто не мог бы и придумать. Поэтому, если мы словом „сила" обозначаем только те причины, которые способны изменять абсолютное состояние тел, то, конечно, нельзя какому бы то ни было телу приписывать силу изменять свое собственное состояние: во всех случаях, когда происходит изменение состояния тела, причина этого, т. е. сила, обязательно находится вне тела.

Примечание 1

121. Возникает вопрос: *откуда происходят те силы, под влиянием которых, согласно нашему наблюдению, состояние тел постоянно изменяется? Или же, ввиду того что они не заключаются в самих телах, не следует ли их приписать нематериальным субстанциям?*

Философы обыкновенно рассуждают иначе. Так как состояние тел непрерывно меняется, они полагают, что причина этого изменения заключается в самих телах, а отсюда они приходят к выводу, что отдельные тела обладают силой постоянно изменять свое состояние, — и, таким образом, они совершенно опрокидывают принцип инерции.

Однако в приведенной цепи суждений они допускают значительный скачок: в самом деле, соглашаясь с первой частью, что причина изменения состояния заключается в телах, мы совершенно отвергаем вторую часть, а именно, будто отдельные тела обладают силой изменять свое состояние. Мы, следовательно, устраняем причину изменения состояния только из того тела, состояние которого изменяется, и утверждаем, что ее следует искать в других телах;

мы, таким образом, приписываем телам силу изменять состояние других тел, но не свое собственное состояние.

Это ни в коем случае не должно казаться нелепым, скорее именно из самой этой способности отдельных тел сохранять свое состояние следует, что в них должны заключаться силы изменять состояние других тел. В самом деле, в большой куче тел, если последние не находятся все в состоянии покоя или не движутся все в одном направлении с одинаковыми скоростями, отдельные тела не могут сохранять своего состояния именно потому, что состояние других должно сохраняться неизменным.

Действительно, представим себе два тела A и B, из которых первое вплотную приблизилось ко второму: совершенно невозможно, чтобы тело A продолжало свое движение без того, чтобы одновременно тело B было выведено из своего состояния покоя; равным образом невозможно, чтобы тело B сохранило свое состояние покоя, без того чтобы прекратилось движение тела A. Так как, значит, оба тела не могут одновременно сохранить своего состояния, то должно либо измениться состояние обоих тел, либо одного из них, — и это должно произойти именно потому, что у обоих тел существует стремление к сохранению своего состояния.

Следовательно, способность отдельных тел к сохранению своего состояния порождает силы, вследствие которых изменяется состояние других тел.

Примечание 2

122. Дальше, если поставить вопрос, почему собственно оба упомянутых тела A и B не могут одновременно сохранить своего состояния, то мы поймем, что причина этого заключается в непроницаемости. В самом деле, если бы оба эти тела могли пройти одно сквозь другое, так что каждое из них предоставило бы другому совершенно свободный проход как бы сквозь свое вещество, то ничто не помешало бы телу A продолжать свое движение, а телу B оставаться в покое; таким образом оба тела подчинялись бы только инерции.

Следовательно, причиной тех сил, вследствие которых изменяется состояние тел, следует считать не только инерцию, но сочетание последней с непроницаемостью. Но так как непроницаемость может быть присвоена лишь телам, а тела обязательно должны обладать инерцией, то непроницаемость уже сама в себе включает инерцию, и, следовательно, будет правильнее одну непроницаемость признать источником тех сил, которые изменяют состояние тел. Поэтому рассматриваемое свойство тел, являющееся первоисточником всех сил, следует подвергнуть более внимательному исследованию.

Определение 13

123. *Непроницаемость представляет собой то свойство тел, в силу которого в одном и том же*

месте не могут находиться одновременно два или большее количество тел.

Это свойство присуще и самым малым элементам тела, так что даже и таких два элемента не могут находиться в одном и том же месте.

Следствие 1

124. Следовательно, благодаря этому свойству каждое отдельное тело должно находиться вне другого тела, так что тела не могут проникнуть одно в другое даже мельчайшими своими частями.

Следствие 2

125. Так как непроницаемость является необходимым свойством тел, то не существует никакой силы, которая была бы в состоянии втиснуть в одно и то же место два тела; в смысле достижения этого эффекта самая большая сила так же мало состоятельна, как и самая малая сила.

Следствие 3

126. Следовательно, как бы ни изменялось состояние тел под действием сил, никогда два элемента тела или две материальные точки не могут быть под их действием втиснуты в одно и то же место.

Пояснение 1

127. Неправильно указывают в опровержение этого общего свойства тел на известные опыты, согласно которым тела, как будто, проникают друг в друга.

Так, например, говорят, что брошенный шар проникает в глину, но здесь слово „проникать“ употребляют в другом смысле: ведь ни одна часть шара не попадает в такое место, в котором сейчас фактически находится часть глины. Слово „проникать“ здесь употребляется в том смысле, что шар занимает теперь то место, которое раньше было занято глиной. Мы возражаем ведь здесь только против того, что тело может занимать какое-либо место, в котором находится другое тело, а не такое место, в котором раньше находилось другое тело.

Точно так же, когда говорят, что вода проникает в губку, то в действительности вода заполняет только промежутки, т. е. поры в губке, а так как последних прежде не отличали от вещества губки, то и получалось, как будто последняя проницаема. Если же мы внимательно разберемся в этом вопросе, то мы поймем, что даже самая малая частичка губки нигде не существует в том же месте, где и вода.

Совершенно так же складываются условия у тел, которые подвергаются сжатию и занимают меньшее пространство: нигде в одном месте не сходятся две частицы, но только уменьшаются между частицами промежутки, причем вытесняется материя, заполняющая эти промежутки.

Если все это тщательно продумать, то не остается никаких сомнений в том, что тела непроницаемы, т. е. два тела никак не могут одновременно существовать в одном и том же месте.

Пояснение 2

128. Таким образом понятие непроницаемости опирается на понятие *места*, без которого оно совершенно несостоятельно. Ведь если бы место не было чем-то отличным от тела, то мы бы никак не могли понять, что такое непроницаемость. Правда, философы, отрицающие реальность места, говорят, что тела необходимо существуют вне себя, но что, такое „вне“ и „внутри“, когда место без тела — ничто этого они совершенно не определяют. Все то, что мы выше изложили по вопросу об абсолютном покое и движении, в полной мере показывает, что место не является только чистым понятием нашего ума, а из непроницаемости мы теперь совершенно ясно видим, что понятие места содержит в себе больше чем просто взаимное соотношение тел, при котором с уничтожением всех тел уже не оставалось бы больше места для *места*.

Итак, место есть нечто такое, что не зависит от тел, и оно не представляет собой только чистого понятия нашего разума. Однако, какова его реальная природа вне нашего разума, я не решился бы определить, хотя мы и должны признать за ним какую-то реальность. И если философы делят все реально существующее на определенные классы и указывают, что место не может быть отнесено ни к какому из них, то я скорее позволил бы себе полагать, что это разделение на классы произведено ими неправильно, так как они недостаточно исследовали относящиеся сюда вопросы.

Аналогично обстоит дело с понятием *времени*, в котором они не принимают ничего реального, хотя в то же время словам „до“ и „после“ они приписывают немало реальности. Подобно тому как истинное понятие места и пространства содержит в себе больше чем последовательность сосуществующих явлений, так и истинное понятие времени содержит в себе больше чем последовательность явлений, происходящих одно после другого; правда, я готов признать, что эти понятия возникли у нас первоначально именно отсюда.

Примечание 1

129. После того как мы выяснили значение непроницаемости, я бы не поколебался признать в ней сущность тел; это может показаться безрассудным, так как почти все философы единогласно утверждают, что сущность вещей нам неизвестна. Конечно, я легко соглашаюсь с этим по отношению к специальным видам тел и я далек от мысли, что нам известна, скажем, сущность золота или серебра. Действительно, в чем бы мы ни полагали сущность золота, все таки неизвестно, присуща ли она золоту в любом его состоянии и не свойственна ли она также и другому телу, которое не является золотом; эта-то неизвестность и сведет на-нет наше утверждение.

Но когда речь идет о теле вообще, я подобного возражения не боюсь: ведь тому, кто вздумал бы отрицать, что сущность тел заключается в их непроницаемости, пришлось бы также отрицать или по меньшей мере сомневаться либо в том, что все тела непроницаемы, либо в том, что все непроницаемое представляет собой тело.

В самом деле, ни один философ не будет сомневаться в том, что сущностью всех тел следует признать то свойство, которое присуще всем телам. Но прежде всего наиболее достоверно, что все тела непроницаемы; ведь если бы нашлись такие вещи, которые обладали бы протяжением, а также и инерцией, т. е., будучи предоставлены самим себе, они оставались бы в покое или двигались равномерно и прямолинейно, но при этом эти вещи не обладали бы непроницаемостью, то их никто не причислил бы к телам; ведь не считают же телами тени или изображения, получаемые с помощью оптических приборов. С другой стороны, все то, что является непроницаемым, все обязательно имеет протяжение и обладает инерцией. В самом деле, непроницаемости нельзя себе представить без протяжения. Наконец вещь, обладающая непроницаемостью, не может не быть подвижной, а раз мы допускаем подвижность, то значит, мы должны допустить и инерцию.

Таким образом то, что является непроницаемым, можно с полным основанием считать телом.

Примечание 2

130. Более серьезное возражение против изложенного мнения может быть основано на том, что мы не в состоянии постичь сущности непроницаемости, так как последняя по самому своему смыслу необходимо должна охватить много тел. В данном случае я легко соглашаюсь, что определение, согласно которому тело считается непроницаемой субстанцией, не соответствует правилам философского рассуждения: не потому, что мы неправильно сущность тел полагаем в их непроницаемости, а по той причине, что этого определения нельзя понять, если раньше того не дано понятия о теле.

Если бы кто-нибудь спросил, что такое непроницаемая субстанция, и на это ответили бы, что она представляет собой нечто такое, сквозь что не могут проникнуть тела, т. е. другие непроницаемые субстанции, то, коиечно, этим вопрос совершенно не был бы разрешен. Но хотя мы это свойство узнаем только из взаимного сравнения тел, однако нет никакого сомнения в том, что основа непроницаемости заложена в некотором внутреннем свойстве каждого тела, так что все тела обладают некоторым определенным свойством, в силу которого они и непроницаемы друг для друга. Это свойство будет, пожалуй, уместно назвать „твердостью". Благодаря этой твердости создается как бы некоторая материальность, которую с полным основанием и можно было бы принять за сущность тел.

Я, конечно, признаю, что это равносильно тому, как если бы я сказал, что сущность тел заключается в их „телесности“. Тем не менее непроницаемость нас приводит к первоисточнику всех сил, а это чего-нибудь да стоит.

Поэтому на данном вопросе следует остановиться подробнее.

Теорема 2

131. *Если два тела сходятся таким образом, что ни одно из них не может сохранить своего состояния, а равно ни одно из них не может пройти сквозь другое, то они воздействуют друг на друга и вызывают силы, вследствие которых их состояние изменяется.*

Доказательство

Так как, согласно условию, тела находятся в таком состоянии, что они могут сохранить последнее лишь в том случае, если они проникнут одно сквозь другое, то ввиду совершенной невозможности подобного взаимного проникновения необходимо должно произойти изменение их состояния. Так как, далее, состояние тел не может изменяться при отсутствии внешних сил, а в предположенном случае подобное изменение произойдет, то, без сомнения, должны существовать силы, которым и следует приписать это действие. Тогда встают следующие вопросы: откуда возникают эти силы? Возникают ли они из непроницаемости или из чего-либо другого? Если допустить, что они произошли из чего-либо иного, то их возникновения, по крайней мере мысленно, можно было бы избежать, и тогда получилось бы, что при наличии непроницаемости не наступило бы никакого изменения состояния и, следовательно, тела должны были бы пройти одно сквозь другое. Так как последнее противоречит условию, то остается принять, что рассматриваемые силы вызваны непроницаемостью.

Итак, в тех случаях, когда тела, не проникая одно сквозь другое, лишены возможности сохранить свое состояние, силы как раз и порождаются непроницаемостью. Вследствие же сил изменяется состояние тел. Таким образом проникновения не происходит. Когда же эти силы проявляют свое действие, то говорят, что тела действуют друг на друга и одно из них изменяет состояние другого.

Следствие 1

132. Следовательно, тела действуют друг на друга в том случае, когда они сходятся так, что каждое из них в отдельности не может сохранить своего состояния, не проходя сквозь другое тело. Отсюда можно вывести определенное понятие о действии тел, которое у большинства авторов обычно является очень неясным.

Следствие 2

133. Силы, изменяющие в этом случае состояние тел, порождаются непроницаемостью этих последних; в результате их действия, между прочим, проникно-

вение предотвращается; эти силы всегда имеют такой размер, что их бывает вполне достаточно для осуществления указанной цели.

Следствие 3

134. Размер этих сил определяется, следовательно, не по непроницаемости, которая, конечно, несоизмерима с какой-либо величиной, а по изменению состояния, в результате чего и получается, что тела друг в друга не проникают.

Следствие 4

135. Таким образом эти силы, проистекающие из непроницаемости, возникают лишь настолько, насколько это необходимо для предотвращения проникновения; как бы ни велики были необходимые для этого силы, непроницаемость всегда порождает их в необходимом размере, так как проникновение никоим образом не может быть осуществлено.

Пояснение 1

136. Если какое-нибудь тело, находящееся в состоянии покоя или движущееся равномерно и прямолинейно, выводится из этого состояния другими телами, то непроницаемость этого тела, а равно тел, на него влияющих, порождает силы, необходимые для изменения состояния. В самом деле, если бы данное тело или влияющие на него тела были проницаемы, то не было бы нужды в каких-либо силах; следовательно, последние порождаются не непроницаемостью

одного лишь тела, а двух или большего числа тел совместно. Непроницаемость, очевидно, нельзя себе представить без наличия непреодолимого сопротивления, и потому-то с полным основанием мы и считаем ее источником тех сил, которые предотвращают проникновение.

Все изложенное до сих пор приводит нас к выводу, что тела в силу свойственной им инерции сохраняют свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до того момента, пока не возникнет какой-либо угрозы проникновения. Но как только они теряют возможность сохранить свое состояние, — без того, чтобы произошло проникновение, — непроницаемость вызывает столь большие силы, что последние изменяют состояние тел в такой мере, какая необходима для избежания проникновения. А так как мир заполнен телами, состояние которых столь различно, что если бы хотя одно из них могло в течение самого малого промежутка времени сохранить свое состояние, то повсюду произошло бы проникновение, — здесь образуется богатейший источник сил, способных непрерывно изменять состояние тел.

Хотя, таким образом, мы допускаем существование во вселенной как бы бесконечного источника сил, возникающих из тел, тем не менее мы совершенно не согласны с мнением тех, которые приписывают телам стремление к постоянному изменению своего состояния; ведь эти силы не стремятся прямо изменить состояние тел, — они стремятся только предотвратить взаимное проникновение тел. Если бы этого стремления не существовало, в мире совершенно не было бы подобных сил.

Пояснение 2

137. Тогда здесь возникает вопрос, обязаны ли этому источнику своим происхождением все без исключения силы, действию которых в мире мы изумляемся? Не может ли состояние тел быть изменено какими-либо другими силами, кроме тех, которые порождаются угрозой проникновения?

Прежде всего в задачи механики не входит решать, могут ли духи влиять на тела и изменять их состояние. Правда, в самих телах мы не находим ничего такого, что бы указывало на невозможность действия духов. Однако воздействие на тела не представляется столь тяжелым делом, чтобы его следовало приписать только всемогуществу божественной воли, так как его приходится присвоить самым обычным телам. Скорее мы должны признать, что мы не видим никаких оснований оспаривать у духов их силу воздействия на тела, хотя мы совершенно не в состоянии указать, каким именно образом они действуют.

Очевидно, однако, нужно возражать против того, что тела способны действовать друг на друга иначе, чем это нами было указано выше. В самом деле, если бы они действовали друг на друга и в том случае, когда не существует никакой опасности проникновения, то они бы действовали друг на друга на расстоянии, и тогда было бы неясно, как этим путем может быть нарушено сохранение состояния. Далее, так как это влияние имело бы своим источником не непроницаемость, то силы должны были бы действовать совершенно одинаково и тогда, когда тела были бы проницаемы; но в таком случае неясно, в чем бы тогда проявлялось действие силы. Поэтому представляется в высшей степени вероятным, что тела не проявляют по отношению друг к другу никаких других сил, кроме тех, которые необходимы для предотвращения проникновения, и если эти силы не могут быть меньше тех сил, какие требуются для настоящей цели, то они также не могут превышать тех сил, которые являются достаточными для этой цели.

Вообще говоря, мы не утверждаем здесь чего-либо определенного, но нужно довольствоваться тем, что найден богатый источник действующих в мире сил. Вместе с тем совершенно ясно, что отсюда проистекает и взаимное действие тел, которое многие философы либо совершенно отрицали, либо оставляли в полном мраке.

В каком размере и в каком случае эти силы возникают из непроницаемости и каким образом они изменяют состояние тел, — этого мы не можем определить, раньше чем произведем общее исследование действия сил.

Примечание

138. Рассмотрев, таким образом, источник происхождения сил, мы можем с полным основанием считать, что в мире существуют силы, под действием которых состояние тел изменяется. В какой мере подобные силы, действующие на тела, друг друга уравновешивают, это обычно исследуется в статике или в динамике, где путем их измерения определяют, что отдельные силы не только бывают больше или меньше других сил, но что силы находятся между собой в определенном численном отношении. очевидно, силы следует отнести к категории величин, так как они, как всякая величина, могут быть сравниваемы друг с другом: из статики мы знаем, в каких случаях две силы можно считать равными или находящимися в определенном заданном отношении.

Для того чтобы легче изучить их действие в смысле изменения состояния тел, нам представляется целесообразным не только исходить из рассмотрения бесконечно малых частиц, на которые действуют силы, — как это мы вообще делаем при исследовании движения, — но мы будем также исследовать мгновенное действие сил: мы определим, какое действие производят силы за отдельные элементы времени, так как может случиться, что с течением времени величина сил изменится. Установив принципы для бесконечно малых тел и за безконечно малый промежуток времени, можно будет без труда путем интегрирования перейти к движению тел, изменяющемуся в течение конечного промежутка времени.

Определение 14

139. *Действием какой-либо силы, произведенным над заданным тельцем за малый промежуточек времени, называется тот отрезочек пути, на который тельце, находящееся в покое, перемещается или на который движущееся тельце смещается в сторону от пути, который оно прошло бы в силу своей инерции* [54].

Следствие 1

140. Настоящее определение действия не является абсолютным: оно связано с определенным телом и определенным временем, причем и то и другое предполагается бесконечно малым. Всякое другое изменение, могущее откуда-либо присоединиться к этому, считается исключенным.

Следствие 2

141. Следовательно, если при заданном тельце и промежуточке времени отрезочек пути остается одним и тем же, то это будет означать, что действие сил будет также одно и то же, а потому и силы следует считать равными. Это будет верно как в случае покоящегося, так и в случае движущегося тельца.

Следствие 3

142. В том случае, когда тельце движется, величина силы измеряется тем отрезочком пути, на который оно смещается в сторону от того пути, который оно прошло бы в результате движения, имевшегося у него уже до того.

Пояснение 1

143. В статике, откуда мы заимствуем измерение сил, тела, к которым приложены силы, предполагаются находящимися в состоянии покоя, поэтому отсюда ничего нельзя извлечь для измерения сил, действующих на движущиеся тела, так что измерение сил в механике является для нас совершенно новым.

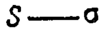

Рис. 10.

Представим себе прежде всего точку, т. е. тельце, находящееся в покое в S (рис. 10), и пусть на него действует некоторая сила, равная p, в направлении $S\sigma$. Тогда действие силы проявится в том, что за данный промежуточек времени dt точка пройдет некоторый отрезочек пути

$$S\sigma = d\omega.$$

Каким образом этот отрезочек связан с силой p и с промежуточком времени dt, это мы установим позднее. Отмечу лишь здесь, что если бы наше тельце находилось в движении, при котором оно за промежуточек времени dt прошло бы путь Ss (рис. 11), равный ds, то мы должны были бы считать, что на него действует такая же сила, равная p, если за тот же промежуточек времени dt оно сместилось бы от s на отрезочек.

$$s\sigma = d\omega.$$

При этом мы предполагаем, что сила p действует на тело в направлении движения Ss.

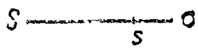

Рис. 11.

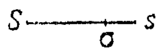

Рис. 12.

Если же сила имеет противоположное направление и если бы под ее влиянием тельце за тот же промежуточек времени dt сместилось назад на такой же отрезочек $s\sigma$ (рис. 12), равный $d\omega$, то эту силу следовало бы считать равной прежней, т. е. равной p.

В общем случае, если тельце находится в таком движении, при котором за промежуточек времени dt проходится путь Ss (рис. 13), равный ds, и если на это тельце действует сила в направлении SV, то в результате этого тельце по истечении времени dt будет находиться не в s, а в σ; можно считать, что тельце как бы переместилось из s в σ на отрезочек пути $s\sigma$ параллельно направлению силы, хотя в действительности в результате непрерывного действия силы оно, конечно, переместилось из S в σ по прямой линии; и, наконец, силу SV можно считать

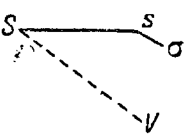

Рис. 13.

равной упомянутой выше силе p, действовавшей на покоящееся тельце в том и только в том случае, если рассматриваемый отрезочек $s\sigma$ равен указанному выше (рис. 10) пути $S\sigma$.

Пояснение 2

144. Для сил, действующих на тела, находящиеся уже в движении, мы даем такое правило их измерения, что считаем их равными тем силам, которые на те же самые тела, находящиеся в покое, за такое же время производят одинаковое действие. Этот прием не требует доказательства, так как он основан на определении, установление которого зависело от нашего свободного выбора. Следовательно, если при любом движении отрезочки пути $s\sigma$ (рис. 11, 12 и 13) оказываются равными отрезочку пути $S\sigma$, на который переместилось за такой же промежуточек времени находившееся в покое тельце под влиянием силы p, то силы, действующие в первом случае, мы принимаем равными последней; мы тем меньше можем быть ограничены в свободе такого обозначения, совпадающего с приведенным выше правилом, что это обозначение находится в соответствии с общепринятым способом выражения.

Однако я не утверждаю, что одни и те же воздействия, наблюдаемые нами в мире, порождают в определенном теле одни и те же результаты, независимо от того, находится ли последнее в покое или в движении; я безусловно признаю, что одно и то же тело совершенно по-разному приводится в движение рекой, в зависимости от того, находится ли оно в покое или в движении. Но как раз этот пример прекрасно подтверждает наше правило, согласно которому мы измеряем силы: в самом деле, утверждая, что одно и то же тело будет приводиться в движение рекой различно, в зависимости от того, находится ли оно в покое или в движении, мы тем самым познаем неравные силы, и в случае движущегося тела мы силу признаем в точности равной той силе, которая дала бы такое же действие над покоящимся телом. Следовательно, когда речь идет о телах, движущихся в реке, в этом случае для каждой степени скорости точно определяется та сила, с которой река фактически воздействует на тело, и эта сила всегда принимается равной той силе, которая произвела бы такое же действие на это тело, если бы последнее находилось в состоянии покоя.

Поэтому приведенное в предыдущих частях механики деление сил на абсолютные и относительные, не имеет собственно сюда отношения, так как здесь приходится в каждом отдельном случае и для каждого момента времени вводить в расчет ту силу, которая воздействует на движущееся тело совершенно так же, как на покоящееся тело. При рассмотрении самих сил в высшей степени важно знать, действуют ли они на движущиеся тела совершенно так же, как на покоящиеся, или же нет.

Примечание

145. Итак, что касается величины сил, действующих на движущиеся тельца, то она определяется по их действию, т. е. по указанному в определении отрезочку пути, совершенно так же, как если бы эти тельца находились в покое.

Если тельце, находящееся в покое в S (рис. 10) под действием силы, равной p, за промежуточек времени, равный dt, перемещается на отрезочек пути $S\sigma = d\omega$, то мы будем считать, что то же самое тельце, находящееся в таком движении, при котором оно само по себе за промежуточек времени dt прошло бы путь $Ss = ds$ (рис. 11, 12 и 13), находится под влиянием такой же силы p, если оно еще переместится в сторону от пути на такой же отрезочек $s\sigma = d\omega$ по направлению силы; таким образом движение тельца нисколько не изменяет действия силы.

Но если отрезочек пути $s\sigma$ (рис. 11, 12 и 13 больше или меньше отрезочка $S\sigma = d\omega$ (рис. 10), то мы считаем, что наше тельце находится под действием соответственно большей или меньшей силы. Поэтому, если мы в состоянии определить действие каких-либо сил на покоящиеся тельца, то мы имеем возможность определить и действие любых сил на движущиеся тельца, если только в каждом отдельном случае мы правильно определим силы, действующие на движущиеся тельца. Здесь всегда следует придерживаться того правила, что движущееся тельце должно считаться находящимся под действием силы, равной p, если произведенное над ним действие равно тому, какое было бы произведено этой силой за такой же промежуточек времени над тем же самым тельцем, находящимся в состоянии покоя.

Посмотрим теперь, каков будет отрезочек пути

$$S\sigma = d\omega,$$

проходимый тельцем, которое раньше покоилось и на которое действуют различные силы. Способ сравнения этих сил излагается в статике.

Теорема 2а

146. *Определенное тельце, находящееся в состоянии покоя, под действием различных сил в течение определенного промежуточка времени dt пройдет отрезочки пути, пропорциональные этим силам.*

Доказательство

Положим, что под влиянием силы, равной p, тельце за промежуточек времени, равный dt, переместится на отрезочек, равный $d\omega$. Пусть, далее, на него одновременно действует в том же направлении и вторая такая же сила, равная p. Тогда под влиянием последней тельце переместится на такой же отрезочек, равный $d\omega$, так как последнее действие нисколько не будет нарушено первым, вызывающим лишь бесконечно малое движение. Таким образом тельце, находящееся под действием силы, равной $2p$, переместится за промежуточек времени, равной dt, на отрезочек, равный $2d\omega$.

Равным образом, если на одно покоящееся тельце в одном направлении одновременно действует n сил, из которых каждая порознь равна p, то последние переместят тельце на отрезочек, равный $n\,d\omega$, — каковое выражение и представит действие силы, равной np.

Следствие 1

147. Следовательно, если одно тельце находится под действием силы, равной p, а другое такое же тельце — под действием силы, равной P, и если за промежуточек времени, равный dt, они переместились соответственно на отрезочки $d\omega$ и $d\Omega$, то

$$d\omega : d\Omega = p : P.$$

Следствие 2

148. Таким образом произведенные за известный промежуточек времени действия пропорциональны силам. При этом мы применяем ту самую меру сил, о которой говорится в статике.

Примечание 1

149. Приведенное выше доказательство основывается на том, что силы предполагаются действующими лишь в течение бесконечно малого промежуточка времени, так что тельце имеет лишь столь бесконечно малое движение, что его можно принять равным нулю. Хотя и может случиться, что тот же самый

толчок, который при покоящемся тельце указывает на силу, равную p, в случае движущегося тельца укажет на другую силу, но это исключение к нашей теореме не имеет отношения. Мы можем представить себе, что на тельце действует несколько сил, как бы поочереди одна за другой, и каждая из этих сил равна p. В таком случае каждая из этих сил в отдельности произведет на тельце такое же действие, как если бы это тельце находилось в покое; при этом бесконечно малое движение ни в малейшей степени не изменит действия сил. Но эта последовательность действия сил, которую мы допустили только мысленно, должна быть совершенно устранена, так чтобы можно было считать, что вся сила действует лишь в течение бесконечно малого промежуточка времени dt.

Примечание 2

150. Если поставить вопрос, почему определенная сила p вызывает в данном тельце в течение промежуточка времени dt определенное действие $d\omega$, то причина этого заключается в том, что тельце обладает некоторой определенной способностью к сохранению покоя, что и составляет его инерцию. Но подобную способность сохранять состояние покоя мы не можем себе представить без известного сопротивления, противодействующего возникновению движения, и чем последнее будет больше или меньше, тем труднее или легче проявиться действию силы.

Так как указанная способность связана с инерцией, то ясно, что последнюю следует отнести к числу величин, так что инерция различных телец может быть различна в зависимости от их размеров. Этого различия мы до сих пор не учитывали: мы исследовали лишь действие сил на одно и то же тельце или же на равные тельца, обладающие, стало быть, равной инерцией. Теперь же мы перейдем к рассмотрению различных телец, что приведет нас к измерению инерции и покажет нам, каким образом в одном теле может быть большая, а в другом — меньшая инерция.

Теорема 3

151. *Если на различные покоящиеся тельца действуют одинаковые силы, то действия этих сил за один и тот же промежуточек времени обратно пропорциональны инерции этих телец.*

Доказательство

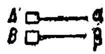

Рис. 14.

Представим себе покоящееся тельце A (рис. 14), которое под действием силы, равной p, за промежуточек времени dt, перемещается на отрезочек

$$Aa = d\omega.$$

Другое тельце B, равное первому, влекомое в том же направлении такой же силой p, за тот же промежуточек времени dt переместится на такой же отрезочек

$$B\beta = d\omega.$$

Пусть теперь эти два тельца срастутся в одно, которое, очевидно, под действием силы, равной $2p$, переместится за промежуточек времени, равный dt, на тот же отрезочек $d\omega$. Таким образом удвоенная сила произведет над удвоенным тельцем такое же действие, как единичная сила над единичным тельцем.

Отсюда понятно, что если n телец A срастутся в одно тельце, которое станет nA, и последнее окажется под действием силы, равной np, то оно за промежуточек времени, равный dt, переместится на отрезочек, равный $d\omega$.

Если тельце nA под действием силы, равной np, за промежуточек времени dt переместится на отрезочек, равный $d\omega$, то, согласно предыдущей теореме, то же тельце nA под действием силы, равной p, за промежуточек времени dt переместится на отрезочек, равный $\frac{d\omega}{n}$. Равным образом тельце mA сместится под действием той же силы, равной p, за промежуточек времени dt на отрезочек $\frac{d\omega}{m}$. Отсюда следует, что отрезочки пути, при помощи которых мы измеряем действия сил, т. е. $\frac{d\omega}{n}$ и $\frac{d\omega}{m}$, находятся друг к другу в отношении, обратном отношению телец nA и mA, т. е. они обратно пропорциональны инерции этих телец.

Пояснение

152. Так как тельце A имеет определенную инерцию, от которой и зависит действие на него силы,

то два таких тельца, соединенные вместе, представляют собой одно тельце, обладающее удвоенной инерцией, три тельца — утроенной инерцией и т. д.

Обратно, тельце следует считать обладающим удвоенной инерцией, если для его перемещения на данный отрезочек и за данный промежуточек времени требуется удвоенная сила.

Отсюда ясно, в каком смысле инерцию можно считать величиной и каким образом в одном теле она может быть большей, а в другом меньшей. А именно, все тельца, перемещающиеся за равные промежуточки времени под действием одинаковых сил на равные отрезочки пути, мы считаем, в отношении их инерции, равными друг другу, и из соединения подобных телец могут образоваться какие угодно тела, инерции которых находятся в любом соотношении друг с другом.

Таким образом при определении действия силы очень большое значение имеет величина инерции, вследствие чего в механике ее необходимо особенно внимательно исследовать.

А так как эта величина в настоящей науке вводится обычно под особыми наименованиями, то представляется целесообразным посвятить ей отдельное определение.

Определение 15

153. *Массой тела, или количеством материи, называется величина заключенной в теле инерции, вследствие которой тело стремится сохранить*

свое состояние и противодействовать всякому его изменению.

Следствие 1

154. Массу тела, т. е. количество материи, следует определять не по объему тела, а по величине его инерции, в силу которой оно стремится сохранить свое состояние и противодействует всякому его изменению.

Следствие 2

155. Таким образом о количестве материи судят по инерции. Содержащим в себе больше материи считают не то тело, которое занимает больший объем, а то тело, для смещения которого при данных условиях требуется бо́льшая сила.

Следствие 3

156. Предыдущая теорема приводит, следовательно, к тому, что если два покоящихся тельца, массы которых равны A и B, приводятся в движение двумя равными силами, то отрезочки пути, которые они проходят за один и тот же промежуточек времени, находятся между собой в обратном отношении к их массам.

Примечание

157. Рассмотрение движения привело нас, таким образом, к познанию многих замечательных свойств тел, из которых первым является их инерция, в силу которой они стремятся сохранить свое абсолютное

состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Сначала мы познакомились с инерцией лишь в общем виде, а теперь для нас становится совершенно ясным, что инерция представляет собой некоторую величину и поддается измерению и что этим путем точно определяется то, что обычно в общежитии слишком неопределенно выражают словами „масса“, или „количество материи“; об этом мы теперь, как будто, составили себе вполне определенное понятие.

Таким образом в телах, помимо их протяжения, содержится еще нечто, что как бы составляет их сущность [55], а именно инерция или масса, которая представляется связанной с твердостью или непроницаемостью, так как никак нельзя себе представить что, кроме материи, могло бы быть непроницаемым.

Материю нельзя себе никак представить также и без протяжения, но в то же время совершенно необязательно, чтобы материя была связана с объемом таким образом, что тела равного объема содержат в себе равные массы, т. е. равные количества материи. В пользу подобного равенства нет ни одного довода, а если мы привлечем на помощь опыт, то найдем, что при наличии тел равного объема в одном может заключаться больше материи, а в другом — меньше.

Правда, на это обычно возражают либо то, что не весь объем заполнен материей, либо то, что содержащаяся в порах материя не принадлежит телу, однако этим еще ни в коем случае не доказывается, что все равные по своему размеру частицы тел обладают и равной инерцией.

Впрочем, этот особенно трудный вопрос не имеет собственно сюда отношения, хотя и представляется вероятным, что в мире существуют по меньшей мере два вида материи, причем один из них при равном объеме обладает гораздо большей массой, чем другой [56].

Теорема 4

158. *Если два тельца, неравных по своей массе, находятся в покое и каждое из них подпадает под действие какой-либо силы, то отрезочки пути, на которые эти тела смещаются в равные промежуточки времени, прямо пропорциональны силам и обратно пропорциональны массам.*

Доказательство

Пусть находящееся в покое тельце, масса которого равна A, приводится в движение силой, равной p, и за промежуточек времени dt перемещается на отрезочек, равный $d\omega$. Если бы то же самое тельце A было приведено в движение другой силой, равной q, то отрезочек пути, пройденный им за тот же промежуточек времени, согласно теореме 2а, равнялся бы $\frac{q\,d\omega}{p}$. Но если другое находящееся в покое тельце, масса которого, равная B, приводится в движение силой, равной q, то оно, согласно теореме 3, проходит за тот же промежуточек времени отрезочек пути, равный $\frac{Aq\,d\omega}{Bp}$. Следовательно, если находящиеся в покое тельца A и B приводятся в движение соответственно силами p и q, то пройденные ими за один и тот же промежуточек времени dt отрезочки пути относятся друг к другу как $d\omega$ к $\frac{Aq\,d\omega}{Bp}$, т. е. как $\frac{p}{A}$ к $\frac{q}{B}$.

Следствие 1

159. Следовательно, если известен отрезочек пути $d\omega$, проходимый за промежуточек времени dt тельцем, масса которого равна A, под действием силы, равной p, то для величины пути, проходимого другим тельцем с массой, равной B, за тот же промежуточек времени dt под действием силы, равной q, получается значение, равное $\frac{Aq\,d\omega}{Bp}$.

Следствие 2

160. Таким образом, если мы все величины будем выражать отвлеченными числами, то отрезочек пути, проходимый тельцем за промежуточек времени dt под действием силы, пропорционален силе, разделенной на массу тельца; это положение справедливо и для тельца, находящегося в движении, если только надлежащим образом вести наблюдение, о чем мы уже говорили выше.

Примечание

161. Таким образом действие сил, влияющих на какое-либо тельце, зависит от величины силы и от массы тельца — при условии, конечно, что промежуточек времени остается неизменным. Это мы определили таким образом, что не остается никакого сомнения в безусловной истинности изложенного здесь правила.

Мы здесь нашли только соотношение между отрезочками пути, силами и массами, и следует заметить, что никакого абсолютного определения для такого рода разнородных величин провести невозможно. Здесь можно получить отвлеченные меры, только приняв какое-либо наблюденное в мире действие за известное, все же остальные действия сводя к нему как к единице. Как это может быть наиболее удобно сделано, это мы подробно покажем позднее.

В тех случаях, когда промежуточки времени неравны между собой, тогда на основании изложенного нельзя сказать, каково будет действие сил. Точно так же не следует переходить от одного уже истекшего промежуточка времени dt к следующему промежуточку dt, так как вследствие движения, сообщенного ему в течение первого промежуточка времени, тельце уже вследствие инерции пройдет в течение второго промежуточка времени некоторый отрезочек пути, который следует прибавить к перемещению, происшедшему под действием силы, Для того чтобы приведенные раньше определения, несмотря на это, сохраняли свое значение, мы должны принять все эти промежуточки времени равными друг другу. Кроме того, нельзя принимать в расчет времени, если не принимать во внимание скорости, уже раньше сообщенной телу.

Этим мы и займемся в следующей задаче. После этого станет яснее все то, что мы до сих пор излагали, не принимая во внимание скорости [57].

Задача 9

162. *Тельце, двигаясь с некоторой скоростью, подпадает под действие силы в направлении своего движения. Определить мгновенное изменение, вызванное в его движении и скорости.*

Решение

Пусть A — масса тельца, движущегося по направлению AB (рис. 15) со скоростью, равной v, с которой оно постоянно и продолжало бы двигаться равномерно и прямолинейно, если бы на него не действовала внешняя сила. Следовательно, если тельце за время, равное dt, прошло путь $AS = s$ и после этого за промежуточек времени dt оно проходит отрезочек $Ss = ds$, то скорость его в S будет равна

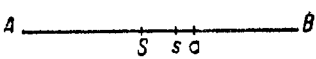

Рис. 15.

$$v = \frac{ds}{dt},$$

и так как при отсутствии какой-либо силы эта скорость должна быть постоянной, то

$$\frac{d^2s}{dt^2}=0.$$

Теперь предположим, что тельце в момент выхода из S подпадает под действие силы, равной p, направленной вдоль SB. Ясно, что тогда его движение уже перестанет быть равномерным, а будет ускоренным, и потому

$$\frac{d^2s}{dt^2}$$

уже не будет равно нулю, а получит некоторое положительное значение, так как действующая на тельце сила увеличивает его скорость, не меняя направления движения. Но так как величина $\frac{d^2s}{dt^2}$ выражает собой тот отрезочек пути, на который тельце перемещается сверх того расстояния, которое пройдено им в силу бывшего у него раньше движения, то оно должно быть прямо пропорционально силе p и обратно пропорционально массе A, т. е. $\frac{d^2s}{dt^2}$ должно быть пропорционально $\frac{p}{A}$.

Полное равенство мы сможем здесь установить только в том случае, если все величины будут выражены в определенных единицах. Пока мы можем составить неопределенного вида уравнение

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{\lambda p}{A},$$

где λ обозначает число, которое будет определено дальше при установлении единиц.

Итак, действие силы p будет состоять в том, что

$$d^2s = \frac{\lambda p\, dt^2}{A},$$

де элемент dt мы считаем постоянным. А так как

$$\frac{ds}{dt} = v$$

будет скорость, то

$$d^2s = dv\, dt,$$

и, следовательно, мы получим

$$dv = \frac{\lambda p\, dt}{A}.$$

Таким образом нами найдено приращение скорости, которое сила p сообщает в течение промежутка времени dt тельцу A, — при условии, конечно, что направление силы совпадает с направлением движения и что сила ускоряет движение.

Следствие 1

163. Итак, если тельце с массой, равной A, движется со скоростью, равной v, так что за промежуточек времени dt оно прошло бы отрезочек, равный ds, то действие силы, имеющей то же направление, что и движение, будет состоять в том, что

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}$$

или

$$dv = \frac{\lambda p\, dt}{A},$$

где элемент времени dt принят постоянным.

Следствие 2

164. Наоборот, если известно ускорение движения, равное $\frac{d^2s}{dt^2}$ или $\frac{dv}{dt}$, то можно определить действующую силу, вызывающую это ускорение. А именно эта сила будет равна

$$p = \frac{A}{\lambda} \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$$

или, иначе,

$$p = \frac{A}{\lambda} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

При этом предполагается, что сила действует в направлении движения.

Следствие 3

165. В том случае, если направление действующей силы противоположно направлению движения, последнее в такой же мере будет замедляться этой силой, и потому мы будем иметь

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{\lambda p}{A}$$

или

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\lambda p}{A}.$$

Следовательно, по сравнению с предыдущим случаем, силу можно рассматривать как величину отрицательную.

Пояснение

166. Мы нашли здесь, что

$$d^2s = \frac{\lambda p \, dt^2}{A},$$

и потому следует считать, что тельце за промежуточек времени dt пройдет отрезочек пути $ds + d^2s$, между тем как в силу свойственного ему самому движения оно прошло бы только отрезочек ds.

Таким образом d^2s является тем отрезочком, который тело проходит под действием силы, — сверх пути, проходимого им в силу свойственного ему движения, — так что величина

$$\frac{\lambda p\, dt^2}{A}$$

должна быть пропорциональна тому отрезочку $d\omega$, который, как это мы говорили выше, тельце A должно пройти за промежуточек времени dt под действием силы p, если оно до того находилось в покое.

Следует отметить, что d^2s выражает собой избыток отрезочка пути, пройденного за промежуточек времени dt, над отрезочком, пройденным в предшествующий такой же промежуточек времени dt, — если действующая сила p постоянна.

Если отрезочек пути, пройденный за настоящий промежуточек времени, равен $ds + d\omega$, где ds обозначает отрезочек, который проходится тельцем вследствие движения, свойственного ему как таковому, а $d\omega$ — отрезочек пути, прибавляющийся в результате действия силы p, то за предшествующий промежуточек времени, если только считать, что на тело действовала та же сила, должен был быть пройден путь $ds - d\omega$, т. е. путь меньший, чем если бы тело совершенно не подвергалось никакому воздействию.

Если d^2s выражает разность между этими двумя отрезочками, т. е. между $ds + d\omega$ и $ds - d\omega$, то мы получим

$$d^2s = 2\,d\omega,$$

откуда

$$d\omega = \frac{1}{2}d^2s = \frac{\lambda p\,dt^2}{2A}.$$

Отсюда следует, что отрезочек $d\omega$, который тельце, ранее находившееся в покое, проходит под действием силы p в течение промежуточка времени dt, составляет половину нашей величины d^2s. При решении задачи, впрочем, я эту величину принял не равной, а только пропорциональной, в силу чего, надо полагать, решение нисколько не делается менее правильным.

Однако данный вопрос стоит того, чтобы его исследовать еще и другим способом.

Задача 10

167. *Дано ускорение, которое сообщается за промежуточек времени dt движущемуся тельцу A силой p, действующей в направлении движения. Определить отрезочек пути $d\omega$, который за то же время dt прошло бы под влиянием той же силы тельце A, если бы оно до того находилось в покое.*

Решение

Так как ускорение дано, то на основании изложенного выше мы имеем

$$d^2s = \frac{\lambda p\, dt^2}{A},$$

где элемент времени dt рассматривается как постоянная величина.

Представим себе теперь, что действующая сила остается одной и той же, независимо от того, движется ли тельце быстрее или медленнее, так что мы можем рассматривать величину p как постоянную. Определим движение в течение времени t, которое, однако, само по себе пусть будет бесконечно мало, — с тем чтобы не было никаких сомнений в том, что в течение этого времени сила p оставалась постоянной. Так как

$$d\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda p\, dt}{A},$$

то путем интегрирования мы получаем

$$\frac{ds}{dt} = C + \frac{\lambda pt}{A}$$

или

$$ds = C\, dt + \frac{\lambda pt\, dt}{A},$$

что после повторного интегрирования дает

$$s = Ct + \frac{\lambda pt^2}{2A}.$$

Таков путь, пройденный тельцем за время t, причем здесь Ct обозначает путь, который оно прошло бы в результате присущего ему движения, а $\frac{\lambda p t^2}{2A}$ обозначает приращение пути, полученное последним под действием силы.

Если мы теперь весь промежуточек времени t примем за бесконечно малый и обозначим его dt вместо t, то $\frac{\lambda p\, dt^2}{2A}$ будет выражать собой отрезочек пути $d\omega$, на который сместилось бы тельце A за промежуточек времени dt под влиянием силы p — сверх того пути, который оно прошло бы в силу присущего ему самому движения. Но это и будет равно тому отрезочку пути $d\omega$, на который сместится покоившееся до того тельце A за тот же промежуточек времени dt под действием силы p.

Мы имеем, следовательно,

$$d\omega = \frac{\lambda p\, dt^2}{2A}$$

или

$$d\omega = \frac{1}{2} d^2 s,$$

как это уже было выведено выше.

Следствие 1

168. Таким образом отрезочек пути, проходимый покоившимся до того телом A за бесконечно малый промежуточек времени dt под действием силы p, представляет собой диференциал второго порядка, т. е. он в бесконечно большое число раз меньше того пути, который тело прошло бы за тот же промежуточек времени с какой-либо конечной скоростью.

Следствие 2

169. Этот отрезочек пути

$$d\omega = \frac{\lambda p\, dt^2}{2A}$$

равен половине диференциала второго порядка d^2s, который был бы пройден за тот же промежуточек времени dt под действием той же силы p тем же произвольно движущимся тельцем A.

Следствие 3

170. Из изложенного выше следует, что отрезочек пути $d\omega$, который, как раньше было показано, прямо пропорционален действующей силе p и обратно пропорционален массе тела A, сверх того прямо пропорционален квадрату промежуточка времени dt.

Примечание

171. С помощью изложенного выше мы в состоянии определить действия сил на произвольно движущиеся тельца в том случае, если направление действующей силы совпадает с направлением движения или прямо ему противоположно. Остается еще исследовать, каковы будут эти действия, когда направление силы наклонно по отношению к направлению движения. Это исследование очень легко произвести, если в соответствии с изложенными раньше приемами разложить движение тела по двум или трем определенным направлениям. Хотя это разложение является только мысленным, оно вполне соответ-

ствует действительности, и в то же время оно чрезвычайно удачно применяется к действию сил, благодаря чему вся задача разрешается с помощью той же самой формулы. И хотя под действием косо направленных сил изменяется не только скорость тельца, но и направление его движения, однако это последнее изменение одновременно содержится в изменении составляющих движений, так что не оказывается надобности в особых формулах для изменения направления.

Как в этих случаях следует построить вычисление, это мы сейчас покажем.

Задача 11

172. *Тельце, двигаясь по направлению* Ss (рис. 16) *с данной скоростью, подвергается действию некоторой силы по направлению* Sp. *Определить действие этой силы на движение тела за данный промежуточек времени* dt.

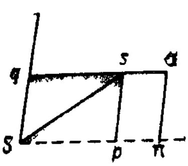

Рис. 16.

Решение

Пусть A — масса тельца, которое в силу присущего ему движения прошло бы за промежуточек времени dt отрезочек пути $Ss = ds$; поэтому его скорость в S была бы равной $\frac{ds}{dt}$. Но пусть тельце в то же время подвергается действию силы, равной p, по направлению Sp. Действие силы проявится в том, что по истечении промежуточка времени dt тело очутится не в S, а в σ, так что оно будет смещено на отрезочек пути

$$s\sigma = d\omega = \frac{\lambda p\, dt^2}{2A},$$

параллельный направлению силы Sp.

Для того чтобы было удобнее определить это действие, разложим движение по двум каким-либо направлениям Sp и Sq, из которых первое совпадает с направлением силы.

Если бы силы не было, то тельце прошло бы по направлению Sp отрезочек пути $Sp = dx$ и по направлению Sq — отрезочек пути $Sq = dy$, причем фигура $Spsq$ будет представлять собой полный параллелограм. Но так как с появлением силы p тело по истечении промежуточка времени dt окажется в σ, то, проводя $\sigma\pi$ параллельно sp, мы получим, что движение будет таким же, как если бы тело прошло по направлению Sp путь

$$S\pi = dx + d\omega,$$

а по направлению Sq, как и раньше, — путь Sq Таким образом сила p влияет только на составляющее движение по направлению Sp, вдоль которого направлена сама сила p, а другое составляющее движение, вдоль Sq, остается без изменения. Движение вдоль Sp ускоряется таким образом, что

$$d^2x = 2\, d\omega$$

или

$$d^2x = \frac{\lambda p\, dt^2}{A}.$$

Итак, если движение разложить по двум или трем направлениям, из которых одно совпадает с направлением силы, то только это последнее движение и испытает на себе действие силы, — совершенно так же, как если бы тельце фактически двигалось по этому направлению. Остальные же составляющие движения не испытают на себе никакого действия со стороны силы.

Следствие 1

173. Если в том случае, когда никакой силы не было, мы при разложении движения имели

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

то при наличии силы p, действующей по направлению Sp, мы имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}$$

и попрежнему

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Следствие 2

174. Точно так же, если движение вдоль Ss разложить на три составляющих движения и если пройденные за промежуточек времени dt элементы равны

dx, dy и dz, из которых первый принят направленным параллельно действующей силе p, то движение выразится следующими тремя уравнениями:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\lambda p}{A},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=0$$

и

$$\frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Следствие 3

175. Если на тельце A одновременно действуют три силы p, q и r, по упомянутым выше трем направлениям, и если элементы соответственно равны dx, dy и dz, то движение тела определится с помощью следующих уравнений:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\lambda p}{A},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\lambda q}{A}$$

и

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\lambda r}{A}.$$

Примечание 1

176. Если движение тельца разложено согласно сделанным нами выше указаниям по трем каким-либо определенным направлениям и на тельце действуют какие-либо силы, то изменение движения может быть легко определено с помощью подобных уравнений

А именно все действующие силы следует разложить по упомянутым трем направлениям, в результате чего получатся силы p, q и r; пусть первая из них, p, действует по направлению OA (рис. 4), т. е. по тому направлению, в котором лежит элемент dx, вторая, q, — по направлению OB, в котором лежит элемент dy, и третья, r, — по направлению OC, в котором лежит элемент dz. И пусть отдельные силы стремятся ускорить движение вдоль этих направлений Вследствие этого движение претерпит такого рода изменение, что, положив элемент времени dt постоянным, мы будем иметь

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\lambda q}{A},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\lambda r}{A}.$$

Здесь следует отметить, что если какая-либо из данных сил действует в противоположном направлении, то ее следует считать отрицательной, — тогда соответствующее ей составляющее движение будет замедляться.

Тремя уравнениями подобного вида может быть представлено изменение всяких движений, как бы ни действовали силы на тельце, а так как эти уравнения вполне сходны между собой, то можно даже считать, что вся механика основывается на одном единственном принципе.

Примечание 2

177. Этот единый принцип охватывает и те аксиомы, которые мы изложили в предыдущей главе для спонтанного движения, т. е. для случая, когда силы отсутствуют. Действительно, в этом случае наши уравнения дают равномерное и прямолинейное движение.

Итак, основа всей механики заключается в следующем едином законе:

Если на тельце, масса которого равна A, действует сила, равная p, и если после разложения движения по направлению силы тельце за промежуточек времени dt проходит отрезочек пути ds со скоростью $\frac{ds}{dt}=v$, то

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{\lambda p}{A},$$

или

$$dv=\frac{\lambda p\,dt}{A}.$$

Таким образом, приращение скорости, взятое по направлению действующей силы, прямо пропорционально произведению действующей силы на промежуточек времени и обратно пропорционально массе тельца.

Обычно в связи с этим ставят вопрос, является ли этот единый принцип, — на котором строится вся механика, а значит, и вся наука о движении, —

необходимым или только случайным [58]. Решение этого вопроса на основе всего доказанного до сих пор не представляет труда. В самом деле, где бы тела ни находились в их движении, никакие иные законы, конечно, не могут иметь места, и всякие другие выражения, пропорциональные приращению скорости, отличные от $\frac{p\,dt}{A}$, приводили бы к явному противоречию. Поэтому совершенно не приходится сомневаться, что этот принцип должен быть отнесен к числу необходимых истин.

И не только по отношению к Земле, где правильность этого принципа может быть подтверждена на опытах, но и по отношению к планетам и другим небесным телам можно смело провозгласить, что все движения, какие только там могут иметь место, направляются и регулируются этим единым принципом.

Правда, вопрос о необходимости или случайности выдвигают обычно применительно не к рассматриваемому принципу, а по отношению к другим законам, известным под именем „законов движения". Однако, поскольку эти законы строго вытекают из нашего принципа, их следует также считать необходимыми.

Что касается, далее, тех законов, которые связаны с определенными видами тел, как упругие, неупругие и жидкие тела, то, поскольку принимается существование подобных тел, эти законы равным образом не могут быть истинными, если только они правильно выведены из нашего принципа.

Примечание 3

178. Хотя в предыдущих частях механики я уже установил принципы этой науки таким образом, что их правильность не вызывала никаких сомнений, тем не менее мне показалось целесообразным вывести их здесь иным путем из более углубленного изучения природы тел и свести их к единому принципу, из которого можно затем более легко вывести все, что относится к движению. Далее, хотя я уже там внимательно исследовал все, что относится к движению бесконечно малых тел или как бы точек, тем не менее будет полезно вкратце изложить, каким образом все это может быть выведено из этого единого принципа; при этом я поведу изложение таким образом, чтобы этим путем возможно ближе подойти к исследованию движения конечных тел.

Так как я здесь установил только отношение, т. е. пропорциональность различных величин, входящих в учение о движении и являющихся неоднородными по своей природе, а последние могут быть сведены к абсолютным мерам только при том условии, если какое-либо одно движение будет принято в качестве известного, — то, раньше чем итти дальше, представляется необходимым возможно тщательнее изучить какое-либо известное движение, например падение тяжелых тел, и отсюда вывести абсолютные меры, которыми мы затем сможем воспользоваться с большим удобством.

Хотя выбор движения зависит от нашего произвола и сводится к опыту, тем не менее этим нисколько не ослабляется необходимый характер нашего принципа, так как момент произвольности сказывается только на абсолютных мерах, которые зависят от известных единиц, выбранных совершенно произвольно.

Глава IV

ОБ АБСОЛЮТНЫХ МЕРАХ, ВЫВЕДЕННЫХ ИЗ ПАДЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ ТЕЛ

Определение 16

179. *Тяжесть — это сила, влекущая вниз все тела вблизи поверхности Земли.*

Сила, с которой какое-либо тело влечется вниз вследствие тяжести, называется также его *весом.*

Следствие 1

180. Таким образом тяжесть есть внешняя причина, влекущая вниз земные тела. Следовательно, ее не следует приписывать самим телам в качестве некоторого их свойства.

Следствие 2

181. Поэтому тело, предоставленное самому себе вблизи поверхности Земли, хотя бы оно и находи-

лось в покое, побуждается к движению вниз и опускается до тех пор, пока не достигнет предметов, препятствующих его дальнейшему снижению.

Следствие 3

182. Покуда падение тела невозможно,— вследствие ли того, что оно лежит на неподвижном предмете, или вследствие того, что оно подвешено, — его тяжесть проявляется в виде давления.

Пояснение

183. Из повседневного опыта мы постоянно убеждаемся, что все тела, с которыми мы сталкиваемся при посредстве наших чувств, обладают тяжестью: и если некоторые тела кажутся нам скорее легкими и как бы стремятся подняться вверх, то причину этого следует приписать воздуху; ибо когда последний устраняется, то и самые легкие тела падают вниз так же быстро, как и самые тяжелые.

Здесь мы отвлекаемся от всякого рода препятствий, которые обычно противодействуют падению тел. Далее, если привлечь на помощь данные опыта, то мы узнаем, что при устранении всех препятствий движению, во-первых, все тела падают одинаково быстро, и, во-вторых, — находятся ли они в покое или в движении, — их влечет вниз одинаковая сила.

Я, значит, исхожу из предположения, что оба эти опыта, хотя они и требуют более обширного знания движения, нам известны: ведь мы поставили себе целью лишь установить твердые меры, а с этой точки зрения совершенно безразлично, откуда именно эти опыты стали нам известны.

Примечание

184. Что тяжесть представляет собой силу, действующую извне на тело и влекущую его вниз, это признают и те лица, которые причину ее видят в притяжении [59]. Именно, они утверждают, что тела влекутся к Земле не в силу какого-либо свойственного им самим инстинкта, а притягиваются к ней силой притяжения самой Земли. Они представляют себе дело таким образом, как если бы Земля испускала по всем направлениям силы, которые охватывают окружающие тела и направляют их к Земле; при этом они предполагают, что упомянутое испускание происходит не при посредстве какой-либо промежуточной среды, но что оно совершенно так же имело бы место, если бы в промежутке между Землей и телами полностью была удалена какая бы то ни была материя. Следовательно, они считают, что тяжесть является действующей на тела нематериальной силой, которая, однако, связана с Землей таким образом, что с уничтожением последней и она исчезает.

Отсюда вытекает, что тела направляются вниз как бы каким-то духом: в самом деле, иначе нельзя себе и представить, каким образом могла бы сила распространиться на далекие расстояния от Земли без посредства какой-либо промежуточной материи. Представим себе, что два тела A и B находятся на большом расстоянии друг от друга и что в промежутке между ними совершенно нет никакой материи, и пусть вблизи тела A не существует ничего такого, что относилось бы к B; тогда в первом теле ничего не изменилось бы, если бы второе тело совершенно исчезло. Из этого следует, что подобного рода испускание сил противоречит здравому смыслу.

Более правдоподобным является предположение, что сила тяжести происходит вследствие действия некоторой тонкой материи, ускользающей от наших чувств. И хотя мы не в состоянии ясно указать, каким именно образом возникает подобная сила, тем не менее нам представляется совершенно неправильным прибегать к каким-либо оккультным качествам.

В гидродинамике учат, что в жидкостях могут возникнуть силы подобного рода.

А когда сторонники притяжения заявляют, что бог наделил Землю притягательной силой, они в сущности утверждают, что бог сам непосредственно толкает тела по направлению к Земле.

Исследуем теперь в общем виде падение тельца, влекомого вниз тяжестью.

Задача 12

185. *Тельце, непрерывно влекомое вниз постоянной силой, начинает свое движение, выходя из состояния покоя. Определить к данному моменту*

длину пройденного пути, а также величину достигнутой им скорости.

Решение

Пусть A — масса тельца, которое первоначально находилось в покое в точке A (рис. 17) и отсюда увлекается вниз постоянной силой, равной p. Под действием этой силы оно — при условии отсутствия каких бы то ни было препятствий — опускается вниз по прямой вертикальной линии AG.

По истечении времени, равного t, оно достигнет точки S, снизившись на высоту $AS = s$. Если элемент времени dt принять за постоянную величину, то движение тельца определится с помощью следующего уравнения:

$$d^2s = \frac{\lambda p\, dt^2}{A}$$

или

$$d\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda p\, dt}{A}.$$

Интеграл этого уравнения будет иметь вид

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda pt}{A} + \text{const}.$$

Рис. 17

Но $\frac{ds}{dt}$ выражает собой скорость движения в точке S, а так как в точке A, где $t = 0$, скорость, согласно условию, равна нулю, то введенная при интегрировании постоянная величина равна нулю, так что для скорости получается выражение

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\lambda pt}{A}.$$

Помножив последнее уравнение на dt, мы получим

$$ds=\frac{\lambda pt\,dt}{A}$$

и после повторного интегрирования

$$s=\frac{\lambda pt^2}{2A},$$

так как для $t=0$ высота $AS=s$ должна обращаться в нуль.

Итак, по истечении времени t тельце снизилось на высоту AS, равную

$$s=\frac{\lambda pt^2}{2A},$$

и в точке S оно приобрело скорость

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\lambda pt}{A}.$$

Следствие 1

186. Следовательно, пройденная при падении тела высота пропорциональна квадрату времени, а достигнутая им скорость пропорциональна самому времени. В обоих случаях, однако, имеет место прямая пропорциональность действующей силе p и обратная пропорциональность массе A.

Следствие 2

187. Достигнутая в S скорость $\frac{ds}{dt}$ такова, что если бы тело двигалось равномерно с такой скоростью, то оно за время t прошло бы путь

$$\frac{t\,ds}{dt}=\frac{\lambda pt^2}{A},$$

что вдвое превышает фактически пройденный путь

$$s=\frac{\lambda pt^2}{2A}.$$

Следствие 3

188. Так как, согласно данным опыта, в случае устранения всех препятствий все тела падают вниз одинаково быстро, то $\frac{\lambda p}{A}$, а значит, и $\frac{p}{A}$ обязательно должно быть постоянной величиной. Таким образом сила p, влекущая любое тело вниз, т. е. вес этого тела, находится в постоянном отношении к его массе A.

Пояснение

189. Когда речь идет о падении тяжелых тел, буква p обозначает вес тела, о котором мы имеем ясное представление, так как меры веса нам очень хорошо известны; буква же A обозначает массу того же тела; это последнее, само по себе менее ясное понятие, может быть достаточно ясно усвоено в силу того, что масса пропорциональна весу.

Далее, мы имеем вполне ясное представление о времени t, так как мы в состоянии выразить величину его при посредстве вполне определенных мер, как секунды, минуты или часы.

Затем высота s, представляя собой прямую линию, определяется с помощью геометрических мер.

Что же касается буквы λ, с помощью которой выражается пропорциональность, то сама по себе она не принимает какого-либо определенного значения, а ей нужно приписать различное значение, в зависимости от того, в каких мерах или единицах выражаются остальные величины. Как только мы все прочие величины, p, A, t и s, выразим в определенных мерах, λ также получит определенное значение, которое должно быть составлено таким образом, чтобы оно соответствовало действительности в одном определенном случае. Тогда оно и впредь сохранит это значение без изменения, если только, конечно, мы будем применять те же единицы измерения. Но это значение должно быть взято из опыта, так как и избранные нами меры основываются на данных опыта. Так, из опыта мы узнаем высоту, на которую снижается тяжелое тело за определенный промежуток времени. И тогда букве λ мы должны присвоить такое значение, чтобы выведенная нами для высоты формула

$$s = \frac{\lambda p t^2}{2A},$$

если она действительно подходит к данному случаю, давала то же самое значение s, какое получается из опыта.

Примечание

190. Таким образом все дело сводится к тому, чтобы для всех величин, входящих в наши формулы, установить определенные меры, которыми мы и будем пользоваться в дальнейшем, — если, конечно, мы хотим выражать явления всех движений в известны мерах.

Существует пять видов величин, которые определяют всякое движение.

1. Пройденный путь, который, представляя собой линию, т. е., значит, геометрическую величину, не вызывает никаких сомнений.

2. Время, мера которого очень хорошо известна; здесь весь вопрос сводится к тому, сколь большой промежуток времени мы пожелаем избрать в качестве единицы.

3. Скорость, которая может быть наиболее ясно выражена, если мы в состоянии указать путь, какой был бы пройден равномерно с той же скоростью за определенное время.

4. Действующая сила, которая должна быть сведена к известным мерам.

5. Масса движущихся тел также входит в расчет; каким образом следует измерять ее величину, — это еще должно быть установлено.

Из названных пяти видов величин не вызывает никаких затруднений путь. Каким образом наиболее удобно вводятся в расчет при посредстве известных мер остальные четыре величины и как соответственно им определяется значение λ,—это мы установим в нижеследующих основных положениях [60].

Основное положение 1

191. *Действующие силы мы будем всегда выражать через равные им веса.*

Пояснение

192. Выражение сил через вес не вызывает никаких затруднений, так как вес тела представляет собой силу, которой оно направляется вниз. Поэтому действующие силы и веса являются величинами однородными.

Какая бы сила ни действовала на то или иное тело, всегда можно себе представить на поверхности Земли такое тело, на которое действует равная сила, направляющая его вниз. Вес этого тела и даст точную меру первой силы.

Если же речь идет о столь большой силе, что на поверхности Земли не может существовать такого тела, у которого был бы вес, равный этой силе, то достаточно знать, во сколько раз эта сила больше веса тела средних размеров, находящегося на поверхности Земли. Этим путем величина силы определяется столь же надежно.

Но так как в настоящее время стало известно, что одни и те же тела влекутся вниз различными силами в различных местностях Земли, то для этого измерения следует избрать определенную местность, с которой должны быть соразмерены все прочие местности. При этом совершенно не существенно, какую именно местность для этого мы изберем, если только в ней же мы проведем те опыты, из которых мы будем заимствовать последующие меры.

Основное положение 2

193. *Массу того или иного тела мы будем выражать через вес, какой оно имело бы вблизи Земли.*

Пояснение

Подобное измерение основывается на том, что веса тел пропорциональны их массам, в силу чего можно считать, что вес каждого тела даст точную меру его массы. Но когда речь идет о массах тел, находящихся вне Земли, то их следует — во всяком случае мысленно — перенести на Землю и притом в ту именно местность, которой мы воспользовались для установления меры силы. Таким образом масса каждого тела будет нами измеряться с помощью веса, которое оно имело бы, будучи перемещено в упомянутую местность. Если бы речь шла о телах, которые ввиду их большого размера не могут быть помещены в этой местности, то их следует исследовать по частям; в этом случае достаточно знать отношение, в каком масса рассматриваемого тела находится к массе какого-либо заданного тела, расположенного в этой местности.

Подобным путем как силы, так и массы сводятся к однородным величинам, так как и те и другие мы намерены выражать с помощью весов. И так как в наших формулах постоянно фигурирует отношение силы к массе, то представляется совершенно безразличным, какой единицей веса, фунтом или унцией, мы воспользуемся для определения его; ведь частное, которое получается от деления какой-либо силы на массу, всегда будет выражаться отвлеченным числом. В случае тяжести, где как действующая сила p, так и масса тела A выражаются при помощи его веса, мы имеем

$$\frac{p}{A} = 1,$$

откуда следует, что за время t тяжелое тело снижается на высоту

$$s = \frac{1}{2}\lambda t^2,$$

а скорость его достигает значения

$$\frac{ds}{dt} = \lambda t.$$

Двигаясь равномерно с подобной скоростью, тело за время t прошло бы путь, равный

$$\lambda t^2 = 2s.$$

Основное положение 3

194. *При измерении времени мы в качестве единицы всегда будем брать секунду.*

Пояснение

195. Секунда, как известно, составляет $\frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 24}$ естественных суток, так как принято сутки делить на 24 часа, час на 60 минут и минуту на 60 секунд. В качестве суток я здесь принимаю средние солнечные сутки, в течение которых Солнце, считая по среднему времени, совершает один оборот вокруг Земли. Хотя этот промежуток времени для разных столетий, повидимому, и не одинаковой продолжительности, тем не менее достаточно знать величину его для определенного данного века, — именно для того, когда через веса тел и выражается мера их массы.

Если какой-нибудь промежуток времени мы обозначаем через t, то это t представляет собой отвлеченное число, показывающее, сколько секунд содержится в данном промежутке времени.

Эта мера времени является наиболее подходящей, так как при всех опытах время показывают обычно в секундах.

Кроме того, таким путем мы избегаем слишком большого количества дробей, которые имели бы место в том случае, если бы в качестве единицы мы избрали больший промежуток времени.

Основное положение 4

196. *Скорость удобнее всего измерять с помощью пути, который проходило бы за отдельные*

секунды тело, движущееся с данной скоростью равномерно.

Пояснение

Наиболее понятный способ определения скорости заключается в том, чтобы указать величину пути, проходимого в каждую отдельную секунду телом, движущимся равномерно с этой скоростью. Так, например, если бы я сказал, что выпущенное из орудия ядро обладает такой скоростью, при которой оно за одну секунду прошло бы 1000 футов, то у всех создастся одинаковое представление об этой скорости.

Таким образом скорости и пройденные пути выражаются при посредстве однородных величин, а именно линий. А так как и промежуток времени и частные от деления сил на массы выражаются с помощью отвлеченных чисел, то в наших формулах остаются величины лишь двух родов, а именно геометрические линии и отвлеченные числа.

Основное положение 5

197. *Высоту, проходимую в течение одной секунды свободно падающим телом, мы в дальнейшем будем обозначать буквой g.*

Пояснение

198. С помощью наблюдений и опытов, произведенных для настоящей цели с величайшей тщательностью, было установлено, что выведенное из состоя-

ния покоя и свободно падающее тело в течение первой секунды проходит путь высотой в $15\frac{5}{8}$ рейнских футов, так что, если мы примем эту меру фута, мы получим значение

$$g = 15\frac{5}{8}.$$

Но так как тяжесть не повсюду на Земле оказывается одинаковой, то приведенная величина не является вполне постоянной. Поэтому-то я уже раньше и упомянул о том, что следует избрать на Земле определенную местность, к которой и надо будет относить определение сил и масс тел через их веса. После того как местность эта будет избрана, в ней надо будет с помощью точных опытов определить высоту g, на которую снижается свободно падающее тело в течение одной секунды. При этом, если есть основание полагать, что с течением столетий продолжительность средних суток изменяется, то следует отметить эпоху, из которой заимствована мера секунд.

Какую местность избрать для настоящей цели, это безразлично: если все упомянутые до сих пор меры свести к этой местности, то окончательные выводы будут совпадать.

Отсюда ясно, что эти установленные по произвольному нашему выбору меры не затрагивают самых принципов механики и не вносят в них никакого произвола: они дают лишь то, что мы приходим к выводам, выраженным в знакомых мерах.

Теорема 5

199. *Если выразить все величины в мерах соответственно только что изложенным положениям, то в приведенных выше формулах вместо λ следует принять значение $2g$, т. е. двойную высоту, на которую тяжелое тело снижается за одну секунду.*

Доказательство

Действительно, для случая падения тяжелых тел, если силу p и массу A выразить соответственно нашим положениям, будет иметь место равенство

$$\frac{p}{A} = 1,$$

и высота, на которую тело снижается за время t, будет равна (рис. 17)

$$AS = s = \frac{1}{2}\lambda t^2.$$

Если теперь время t выразить в секундах и положить $t = 1$, то величина s даст нам ту высоту, на которую, согласно условию, тяжелое тело снижается за одну секунду. Ясно, что в силу этого мы имеем

$$g = \frac{1}{2}\lambda,$$

и, следовательно, должно быть принято $\lambda = 2g$. Тогда достигнутая в конце первой секунды скорость будет иметь вид:

$$\frac{ds}{dt} = \lambda t = \lambda = 2g.$$

Таким образом величина этой скорости такова, что тело, двигаясь равномерно с подобной скоростью, проходило бы в каждую отдельную секунду путь, равный $2g$, — совершенно так, как этого требует принятый нами способ измерения скорости.

Следствие 1

200. Таким образом λ обозначает не число, а линию, которая однородна с пройденным путем s. Остальные величины t и $\frac{p}{A}$ выражаются отвлеченными числами.

Следствие 2

201. Следовательно, если находящееся в покое тельце с массой, равной A, попадает под действие силы, равной p, то за промежуточек времени dt оно проходит отрезочек пути, равный

$$\frac{gp\,dt^2}{A},$$

при условии, конечно, что мы постоянно пользуемся указанными выше мерами.

Следствие 3

202. Но если тельце A уже находится в движении, и на него начинает действовать сила, равная p, то после разложения движения то составляющее движение, которое совпадает с направлением действующей силы и при котором тельце за промежуточек

времени dt проходит отрезочек, равный dx, изменяется таким образом, что

$$d^2x = \frac{2gp\,dt^2}{A}$$

и

$$d\frac{dx}{dt} = \frac{2gp\,dt}{A},$$

где $d\frac{dx}{dt}$ представляет собой приращение скорости в этом направлении.

Следствие 4

203. Если по этим данным мы найдем скорость составляющего движения по указанному направлению, т. е. если мы найдем $\frac{dx}{dt}$, то при тех же наших мерах она укажет нам величину того пути, который прошло бы за секунду тело, движущееся с этой скоростью равномерно.

Примечание

204. Путем применения таких мер и единиц, какие нами описаны выше, мы можем при помощи наших формул, проставляя $2g$ вместо λ, очень легко выразить любые движения в абсолютных мерах. Этот метод представляется гораздо более удобным, чем те, какие я применял раньше, когда скорости я выражал в виде квадратного корня из высот, после прохождения которых тяжелое тело приобретает именно эти скорости, и в окончательное выражение вводил вместо скоростей соответствующие им высоты. Ведь

по высоте, соответствующей данной скорости, еще не так-то легко узнать самую скорость, так как приходится еще произвести некоторое вычисление, чтобы притти к обычным мерам.

Кроме того, тогда и относительно времени пришлось бы производить особое вычисление, при котором нужно было бы ввести некоторую новую единицу, для того чтобы время было выражено в секундах. Теперь же все эти окольные пути мы сделаем совершенно ненужными как по отношению к скоростям, так и по отношению к времени, если будем пользоваться указанными выше мерами. Все различие этих методов заключается в том, что раньше в общих формулах λ обозначало отвлеченную дробь $\frac{1}{2}$, а здесь вместо λ проставляется линия, равная $2g$.

Следовательно, если кто-либо для определения какого-нибудь движения сделал вычисление по прежнему способу, то последнее очень легко может быть сведено на нынешний наш способ, и таким путем очень быстро получаются все абсолютные меры.

При новом способе в уравнениях, выражающих движение, легко заметить однородность, так как только пройденный путь и буква g представляют собой линейные величины и имеют как бы одно измерение; аналогичный вид имеют и скорости, если последние почему-либо вводятся в вычисление. С другой стороны, время t и дробь $\frac{p}{A}$ выражаются оба отвлеченными числами и потому должны считаться имеющими нулевое измерение. В вычислениях же, произведенных по прежнему способу, как скорости, так и время выражаются с помощью квадратных корней из линейных величин, вследствие чего они должны были быть рассматриваемы как величины, имеющие половинное измерение.

Отбрасывая поэтому прежний способ определения абсолютных мер, мы принимаем теперь этот новый, значительно более простой и легкий способ и в дальнейшем будем пользоваться только этим последним.

Глава V

ОБ АБСОЛЮТНОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛЕЦ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИЛ

Задача 13

205. *Силы действуют на тельце таким образом, что движение последнего происходит в одной и той же плоскости. Определить пройденный тельцем путь, положение тельца в любой момент времени и скорость его движения.*

Решение

Для того чтобы движение происходило в одной и той же плоскости, необходимо, чтобы направление сил, непрерывно действующих на тело, а также направление движения, первоначально бывшего у тела, лежали в одной и той же плоскости.

Пусть эта плоскость будет представлена плоскостью чертежа (рис. 18). Изберем на последней две произвольные оси OA и OB, причем для удобства вычислений возьмем их взаимно перпендикулярными. Пусть ESF будет описанный тельцем путь, по которому оно по истечении времени t, выраженного в секундах, достигнет точки S.

Из точки S опустим на линию OA перпендикуляр SX и пусть будут тогда координаты

$$OX = x \quad \text{и} \quad XS = y,$$

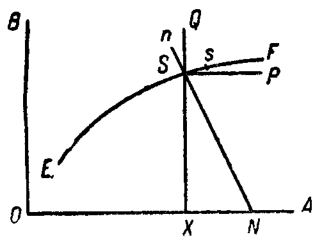

Рис. 18.

так что если положить пройденный путь $ES = s$, то мы получим

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Пусть, далее, масса тельца равна A, величина которой должна быть определена, конечно, по весу его, когда тельце находится в местности, избранной для абсолютных измерений. Какие бы силы ни действовали на тельце в S, последние путем статического разложения могут быть сведены к двум силам, действующим по направлениям SP и SQ, параллельным принятым осям.

Пусть эти силы, обе выраженные через равные им веса, составляют $SP = P$ и $SQ = Q$. Примем элемент времени dt за постоянную величину.

При указанных предположениях представим себе движение разложенным по направлениям SP и SQ.

Тогда определение движения будет заключаться в двух уравнениях:

$$d^2x = \frac{2gP\,dt^2}{A}$$

и

$$d^2y = \frac{2gQ\,dt^2}{A},$$

где g обозначает — это необходимо всегда помнить — высоту, на которую снижается тяжелое тело за одну секунду в упомянутой выше местности Земли.

Отсюда получается, что скорость составляющего движения вдоль SP равна

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2g}{A}\int P\,dt,$$

а по направлению SQ равна

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2g}{A}\int Q\,dt.$$

Если теперь действительную скорость в точке S положить равной v, то ввиду того, что

$$v = \frac{ds}{dt}$$

и

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

мы получаем следующее уравнение:

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y = ds\,d^2s = \frac{2g\,dt^2}{A}\,(P\,dx + Q\,dy).$$

А так как, далее,

$$ds = v\,dt \quad \text{и} \quad d^2s = dv\,dt,$$

то мы имеем

$$v\,dv = \frac{2g}{A}\,(P\,dx + Q\,dy)$$

и

$$v^2 = \frac{4g}{A} \int (P\,dx + Q\,dy).$$

Положив, далее, $dy = p\,dx$ так, что

$$ds = dx\sqrt{1+p^2},$$

мы получаем

$$d^2y = p\,d^2x + dp\,dx = \frac{2gQ\,dt^2}{A} - \frac{2gPp\,dt^2}{A} + dp\,dx,$$

откуда

$$dp = \frac{2g\,dt^2}{A\,dx}(Q - Pp) = \frac{2g\,dt^2}{A\,dx^2}(Q\,dx - P\,dy).$$

Так как

$$ds = v\,dt = dx\sqrt{1+p^2},$$

то

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{v}$$

и, следовательно,

$$dp = \frac{2g(1+p^2)}{Av^2}(Q\,dx - P\,dy).$$

Но радиус кривизны кривой ESF, поскольку последняя обращена к OA своей вогнутостью, равен

$$-\frac{dx(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}{dp} = -\frac{ds(1+p^2)}{dp}.$$

Если последний обозначить через r, то мы будем иметь

$$dp = -\frac{ds(1+p^2)}{r},$$

и, таким образом, мы приходим к уравнению

$$-\frac{ds}{r} = \frac{2g(Q\,dx - P\,dy)}{Av^2}$$

или

$$\frac{P\,dy - Q\,dx}{ds} = \frac{Av^2}{2gr}.$$

Следствие 1

206. Следовательно, движение выражается с помощью следующих двух уравнений:

$$Av\,dv = 2g\,(P\,dx + Q\,dy)$$

и

$$Av^2 ds = 2gr\,(P\,dy - Q\,dx),$$

где вместо времени t входит скорость v.

Эти уравнения более удобны в тех случаях, когда силы P и Q зависят от скорости тела.

Следствие 2

207. Необходимо здесь отметить, что формула $\frac{P\,dx + Q\,dy}{ds}$ выражает касательную силу, а $\frac{P\,dy - Q\,dx}{ds}$ — нормальную силу, и если первую обозначить через T, а вторую — через N, то мы получаем

$$Av\,dv = 2gT\,ds$$

и

$$Av^2 = 2gNr.$$

Последние выражения совпадают с формулами, приведенными в предыдущей книге.

Следствие 3

208. С введением указанных мер действие касательной силы T выражается уравнением

$$T = \frac{Av\,dv}{2g\,ds},$$

а действие нормальной силы выражается уравнением

$$N = \frac{Av^2}{2gr}.$$

А так как

$$r = -\frac{ds(1+p^2)}{dp},$$

причем

$$dy = p\,dx,$$

то мы будем иметь

$$N = -\frac{Av^2\,dp}{2g\,ds\,(1+p^2)},$$

конечно, при условии, если мы примем, что нормальная сила направлена по оси OA.

Пример

209. Пусть тельце находится под непрерывным действием постоянной силы, равной его весу A и направленной по BO так, что мы, значит, имеем здесь случай наклонно брошенного тела.

Следовательно, в данном случае сила

$$P = 0,$$

а сила

$$Q = -A,$$

и мы получаем, таким образом, уравнения

$$d^2x = 0$$

и

$$d^2y = -2g\,dt^2.$$

Пусть вначале в точке O тельце было брошено таким образом, что его скорость была равна c, а направление его движения с линией OA, которую мы принимаем горизонтальной, составляло угол, равный ζ. Тогда, следовательно, в начальный момент скорость по направлению OA должна была быть равной

$$c \cos \zeta,$$

а по направлению OB равной

$$c \sin \zeta.$$

При этих условиях первое из полученных выше уравнений будет иметь вид:

$$\frac{dx}{dt} = c \cos \zeta,$$

а второе

$$\frac{dy}{dt} = c \sin . \zeta - 2gt,$$

так как при $t = 0$ выражения $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ должны дать начальные скорости.

Если теперь эти два уравнения снова проинтегрировать, то мы получим

$$x = ct \cos \zeta$$

и

$$y = ct \sin \zeta - gt^2,$$

так как при $t = 0$ как x, так и y обращаются в нуль.

Отсюда

$$-4gy = 4g^2t^2 - 4cgt \sin \zeta$$

и, таким образом,

$$c^2 \sin^2 \zeta - 4gy = (2gt - c \sin \zeta)^2 = \\ = \left(c \sin \zeta - \frac{2gx}{c \cos \zeta}\right)^2.$$

Отсюда следует, что описываемая кривая представляет собой параболу, уравнение которой имеет вид:

$$\left(\frac{c^2 \sin\zeta\cos\zeta}{2g} - x\right)^2 = \frac{c^2\cos^2\zeta}{g}\left(\frac{c^2\sin^2\zeta}{4g} - y\right).$$

Параметр этой параболы равен $\frac{c^2\cos^2\zeta}{g}$. Вертикальная ось этой параболы удалена от точки O на расстояние, равное $\frac{c^2\sin\zeta\cos\zeta}{2g}$, а вершина расположена на высоте, равной $\frac{c^2\sin^2\zeta}{4g}$.

Так как, далее,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{c^2 - 4cgt\sin\zeta + 4g^2t^2} = v,$$

то скорость в точке S будет

$$v = \sqrt{c^2 - 4gy}.$$

Наконец, если положить $y = 0$, то определяется дальность полета, которая равна $\frac{c^2\sin\zeta\cos\zeta}{g}$.

Примечание

210. Я не останавливаюсь здесь на изложении других вопросов, которые могут сюда относиться, так как все это я уже раньше исследовал подробно. Следует лишь отметить, что здесь идет речь об абсолютном и свободном движении. Хотя я только что вывел движение тяжелых тел, а последнее, насколько мы его относим к Земле, является, вообще говоря,

относительным и потому отличается от абсолютного движения, но мы в дальнейшем покажем, что его можно рассматривать как абсолютное. Действительно, так как все земные тела находятся под действием таких же сил, как и сама Земля, то в результате получается, что они движутся по отношению к Земле совершенно так же, как если бы Земля находилась в покое, а упомянутых сил совершенно не было бы; это будет нами точно доказано в следующей главе.

Свободное движение следует понимать в том смысле, что тельцу извне ничто не мешает подчиняться действию внешних сил; подобное движение следует ясно отличать от движения со связями [61], при котором тельце, скажем, заключенное в канале, может передвигаться только вдоль этого канала; подобные движения я рассмотрел во второй книге.

Здесь я изложу только одну задачу, касающуюся вопроса о канале, расположенном в одной плоскости, причем я мысленно отвлекусь от всякого трения, с тем чтобы легче было разобрать, каким образом подобные задачи разрешаются с помощью настоящего нового метода, и с тем чтобы получить возможность определить давление тельца на стенки трубки.

Задача 14

211. *Тельце помещено внутри канала, расположенного в одной плоскости, и находится под действием некоторых сил. Определить движение тельца в канале и давление, производимое им на последний.*

Решение

Форма канала ESF (рис. 18) считается, значит, заданной, и пусть по примеру прежнего она отнесена к двум взаимно перпендикулярным осям OA и OB. Если по истечении времени t тельце дошло до S, то $OX = x$, $XS = y$, и дуга $S = s$.

Далее, силы, отнесенные к тем же направлениям, пусть будут $SP = P$ и $SQ = Q$, а масса тельца пусть равняется A. Поскольку канал отклоняет движение от того направления, по которому тельце двигалось бы, если бы оно было предоставлено самому себе, постольку он действует на него с силами, которые хотя и являются неизвестными, но, будучи отнесены к тем же направлениям, дают по направлению SP некоторую силу X и по направлению SQ силу Y; об этих силах, впрочем, известно, что они не ускоряют и не замедляют движения тельца.

Теперь, так как сила по направлению $SP = P + X$, а по направлению $SQ = Q + Y$, то, положив скорость в S равной v и радиус кривизны равным r, мы согласно § 206, получаем следующие уравнения:

$$Av\,dv = 2g\,[(P + X)\,dx + (Q + Y)\,dy]$$

и

$$Av^2\,ds = 2gr\,[(P + X)\,dy - (Q + Y)\,dx].$$

Так как силы X и Y ничего не дают для увеличения скорости dv, то имеет место равенство

$$X\,dx + Y\,dy = 0.$$

Второе же уравнение нам дает:

$$\frac{X\,dy - Y\,dx}{ds} = \frac{Av^2}{2gr} - \frac{P\,dy + Q\,dx}{ds}.$$

Отсюда можно определить эти силы.

Таким образом прежде всего с помощью уравнения

$$Av\,dv = 2g\,(P\,dx + Q\,dy)$$

определяется движение вдоль канала, откуда можно определить скорость v тельца в любой точке. Далее, силы X и Y, с которыми воздействует канал на тельце по направлениям SP и SQ, такого рода, что мы имеем

$$\frac{X\,dx + Y\,dy}{ds} = 0$$

и

$$\frac{X\,dy - Y\,dx}{ds} = \frac{Av^2}{2gr} - \frac{P\,dy + Q\,dx}{ds}.$$

Если же эти силы отнести к направлению канала Ss и к нормали SN, то в первом из этих направлений получается сила, равная нулю, а во втором направлении сила, равная

$$\frac{Av^2}{2gr} - \frac{P\,dy + Q\,dx}{ds}.$$

Значит, и обратно, с такой силой тельце давит на канал в противоположном направлении Sn: это, значит, и есть искомоедавление.

Следствие 1

212. Следовательно, если тельце во время своего движения по каналу не подвергается действию внещ-

них сил P и Q, то его движение становится равномерным, так как $Av\,dv = 0$. В этом случае оно повсюду давит нормально на канал с силой, равной

$$\frac{Av^2}{2gr},$$

по линии Sn, направленной противоположно радиусу кривизны.

Следствие 2

213. Сила $\frac{Av^2}{2gr}$, производящая давление на канал, называется *центробежной силой*; она возникает вследствие того, что тельце вопреки своей инерции вынуждено двигаться по кривой линии. Сила эта прямо пропорциональна массе тела A и квадрату скорости v, а также обратно пропорциональна радиусу кривизны r.

Следствие 3

214. Если же тельце находится под действием и тангенциальной силы T по направлению Ss и нормальной силы N по направлению SN, то мы имеем прежде всего

$$Av\,dv = 2gT\,ds,$$

а затем канал испытывает в направлении Sn давление силы, равной $\frac{Av^2}{2gr} - N$.

Пример

215. Положим, тельце, находящееся под действием тяжести, вынуждено подниматься по дуге OS круга (рис. 19). Пусть центр этого круга будет в B и ра-

диус $OB = b$. Пусть, далее, OB будет вертикальная линия, OA — горизонтальная и пусть скорость в точке O будет равна c. Тогда

$$\text{сила } P = 0,$$

$$\text{сила } Q = -A,$$

$$r = b,$$

и для определения движения тела мы будем иметь уравнение

$$Av\,dv = -2Ag\,dy$$

или

$$v\,dv = -2g\,dy.$$

Отсюда мы получаем

$$v^2 = c^2 - 4gy.$$

Скорость тела становится равной нулю в некоторой точке D, для которой

$$y = \frac{c^2}{4g}.$$

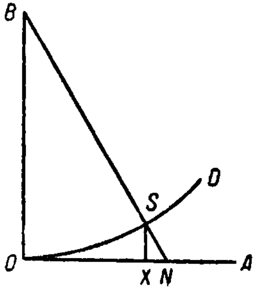

Рис. 19.

Величина силы, производящей давление на канал по направлению SB, будет равна

$$-\frac{A(c^2 - 4gy)}{2gb} - \frac{A\,dx}{ds}.$$

Но в силу того, что

$$x^2 + (b - y)^2 = b^2,$$

мы имеем

$$x = \sqrt{2by - y^2},$$

$$dx = \frac{b\,dy - y\,dy}{\sqrt{2by - y^2}}$$

и

$$ds = \frac{b\,dy}{\sqrt{2by - y^2}}.$$

Вследствие этого давление по направлению SB равно

$$-\frac{Ac^2}{2bg} + \frac{2Ay}{b} - \frac{A(b-y)}{b} = -A + \frac{3Ay}{b} - \frac{Ac^2}{2gb}.$$

Так как последняя величина отрицательна, то давление на канал будет происходить по направлению SN с силой, равной

$$A\left(1 + \frac{c^2}{2bg} - \frac{3y}{b}\right).$$

Так как, далее,

$$v = \sqrt{c^2 - 4gy},$$

то элемент времени dt равен

$$\frac{ds}{v} = \frac{b\,dy}{\sqrt{(c^2 - 4gy)(2by - y^2)}};$$

а так как

$$y = \frac{c^2 - v^2}{4g}$$

и

$$dy = -\frac{v\,dv}{2g},$$

то

$$dt = -\frac{2b\,dv}{\sqrt{(c^2 - v^2)(8bg - c^2 + v^2)}}.$$

Если начальная скорость c мала по сравнению с b, то, ввиду того что v не может стать больше c, мы приближенно будем иметь

$$dt = -\frac{dv}{\sqrt{c^2 - v^2}}\sqrt{\frac{b}{2g}},$$

а после интегрирования

$$t = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2g}} \arccos \frac{v}{c} \left[{}^{62}\right].$$

Отсюда продолжительность восходящего движения до точки D, где скорость становится равной нулю, равна

$$\frac{\pi\sqrt{b}}{2\sqrt{2g}},$$

где π представляет собой половину окружности круга с радиусом, равным единице. Этот промежуток времени называют *полупериодом колебаний*. Для того чтобы время полного колебания

$$\frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2g}}$$

равнялось одной секунде, т. е. единице, радиус BO должен быть взят равным

$$b = \frac{2g}{\pi^2}.$$

Такова длина простого маятника, совершающего за каждую секунду одно колебание. Поэтому, если $g = 15,625$ рейнского фута, то длина этого маятника будет равна 3,166287 рейнского фута.

Примечание

216. Излишне указывать, что мы взяли здесь канал только с той целью, чтобы движение протекало по определенной заданной линии; но последнее может быть достигнуто разнообразными способами. Нам показалось уместным в приведенном примере исследо-

вать один подобный случай, именно случай маятника. Относящиеся вообще сюда задачи я достаточно подробно осветил во второй книге механики.

С другой стороны, так как там я, к сожалению, не изложил того метода, с помощью которого теперь сводятся к вычислению движения небесных тел и который я стал применять только позднее, то представляется целесообразным изложить его здесь более подробно.

Этот вопрос вообще примыкает к задаче 13 (§ 205), но метод его решения имеет то отличие, что движение определяется не с помощью координат, а с помощью расстояний от одной определенной точки и с помощью углов, описываемых вокруг последней.

Поскольку рассматриваемое движение происходит в одной плоскости, я покажу, каким образом следует производить его исследование в соответствии с настоящим методом, а затем я также остановлюсь на случае движения, происходящего не в одной плоскости.

Задача 15

217. *Тельце движется свободно в плоскости, в которой оно постоянно находится, под действием двух сил, из которых одна направлена к определенной неподвижной точке O* (рис. 20), *а другая имеет направление, перпендикулярное к первой. Найти для любого момента времени расстояние тела S от точки O и угол AOS.*

Решение

Пусть за время t тельце, масса которого равна A, прошло от A до S и пусть расстояние $OS = u$, а угол $AOS = \varphi$.

В точке S тело будет находиться под действием двух сил: во-первых, силы, равной V, направленной

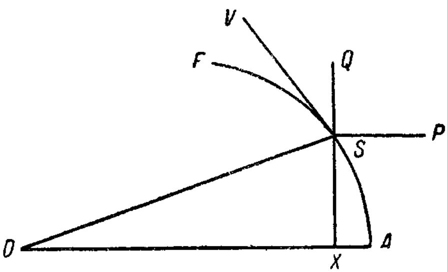

Рис. 20.

вдоль SO, и, во-вторых, силы, равной S, направленной вдоль SV нормально к OS.

Для того чтобы этот случай было легче свести к задаче 13, опустим из точки S перпендикуляр SX на неподвижную прямую OA и введем координаты $OX = x$ и $XS = y$. Тогда

$$x = u \cos \varphi$$

и

$$y = u \sin \varphi.$$

Отнесем теперь силы V и S к тем же направлениям SP и SQ; тогда мы будем иметь силу

$$SP = -V \cos \varphi - S \sin \varphi$$

и силу

$$SQ = -V\sin\varphi + S\cos\varphi.$$

Обе эти силы выше мы назвали соответственно P и Q. Отсюда мы получаем следующие два уравнения:

$$d^2x = -\frac{2g\,dt^2}{A}(V\cos\varphi + S\sin\varphi),$$

$$d^2y = -\frac{2g\,dt^2}{A}(V\sin\varphi - S\cos\varphi).$$

Из сочетания этих уравнений мы выводим

$$d^2x\cos\varphi + d^2y\sin\varphi = -\frac{2gV\,dt^2}{A},$$

$$d^2x\sin\varphi - d^2y\cos\varphi = -\frac{2gS\,dt^2}{A}.$$

Но из

$$x = u\cos\varphi$$

и

$$y = u\sin\varphi$$

мы получаем

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = u$$

и

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0.$$

Отсюда, после диференцирования, мы будем иметь

$$dx\cos\varphi + dy\sin\varphi = du$$

и

$$dx\sin\varphi - dy\cos\varphi + u\,d\varphi = 0$$

или

$$dx\sin\varphi - dy\cos\varphi = -u\,d\varphi.$$

После повторного диференцирования мы получаем

$$d^2x\cos\varphi + d^2y\sin\varphi + u\,d\varphi^2 = d^2u$$

и

$$d^2x \sin\varphi - d^2y \cos\varphi + du\, d\varphi = - du\, d\varphi - u\, d^2\varphi.$$

Подставив эти значения, мы получаем для определения движения следующие два уравнения:

$$\text{I.}\quad d^2u - u\, d\varphi^2 + \frac{2gV\, dt^2}{A} = 0,$$

$$\text{II.}\quad u\, d^2\varphi + 2du\, d\varphi - \frac{2gS\, dt^2}{A} = 0.$$

Следствие 1

218. Если второе уравнение помножить на u и проинтегрировать, то мы получим

$$u^2\, d\varphi = \frac{2g\, dt}{A} \int Su\, dt.$$

Следует иметь в виду, что

$$\frac{1}{2} u^2\, d\varphi$$

представляет собой элемент площади AOS; отсюда вся эта площадь равна

$$\frac{g}{A} \int dt \int Su\, dt.$$

Следовательно, если составляющая $SV = S$ силы равна нулю, то площадь AOS пропорциональна времени t, какова бы ни была другая составляющая V, действующая по направлению к точке O.

Следствие 2

219. Если первое уравнение умножить на du, второе — на $u\,d\varphi$ и затем сложить, то мы получим

$$du\,d^2u + u\,du\,d\varphi^2 + u^2\,d\varphi\,d^2\varphi = -\frac{2gV\,dt^2\,du}{A} + \frac{2gSu\,dt^2\,d\varphi}{A},$$

откуда после интегрирования получается

$$du^2 + u^2\,d\varphi^2 = \frac{4g\,dt^2}{A}\int(Su\,d\varphi - V\,du).$$

Здесь

$$\sqrt{du^2 + u^2\,d\varphi^2}$$

представляет собой элемент пути AS, так что

$$\frac{du^2 + u^2\,d\varphi^2}{dt^2}$$

обозначает квадрат скорости в точке S.

Следствие 3

220. Если второе уравнение помножить на $2u^3\,d\varphi$, то, так как dt постоянно, мы получаем следующий интеграл:

$$u^4\,d\varphi^2 = \frac{4g\,dt^2}{A}\int Su^3\,d\varphi,$$

а отсюда с помощью предыдущего уравнения мы получим

$$u^2\,du^2 = \frac{4g\,dt^2}{A}\left(u^2\int Su\,d\varphi - \int Su^3\,d\varphi - u^2\int V\,du\right)$$

или

$$u^2\,du^2 = \frac{4g\,dt^2}{A}\left(2\int u\,du\int Su\,d\varphi - u^2\int V\,du\right)$$ [63].

Здесь следует отметить, что элемент времени dt находится вне знака интеграла.

Следствие 4

221. Если $S=0$, — а это есть случай центростремительных сил, — то

$$u^2\, d\varphi = f^2\, dt$$

и

$$u\, d\varphi = \frac{f^2\, dt}{u}.$$

Если эти значения подставить в выражение, приведенное в следствии 2, то мы получим

$$du^2 = -\frac{f^4\, dt^2}{u^2} - \frac{4g\, dt^2}{A}\int V\, du + c^2\, dt^2\ [64].$$

Следовательно,

$$dt = \frac{u\, du}{\sqrt{c^2u^2 - f^4 - \frac{4gu^2}{A}\int V\, du}}$$

и

$$d\varphi = \frac{f^2\, du}{u\sqrt{c^2u^2 - f^4 - \frac{4gu^2}{A}\int V\, du}}\ [65].$$

Примечание

222. Эти формулы очень часто применяются в астрономии, где с их помощью определяют долготу, аномалию и расстояние планеты, притягиваемой к определенной точке.

Здесь не место останавливаться более подробно на этом вопросе, так как последний относится к астрономии: вполне достаточно лишь в общем виде изложить метод решения подобных задач.

Переходим теперь к рассмотрению движений, происходящих не в одной плоскости.

Задача 16

223. *Тельце движется свободно и находится под действием произвольных сил. Определить движение этого тельца, пользуясь тремя взаимно перпендикулярными координатами.*

Решение

Пусть имеются три взаимно перпендикулярных оси OA, OB и OC (рис. 21) и пусть тельце, масса

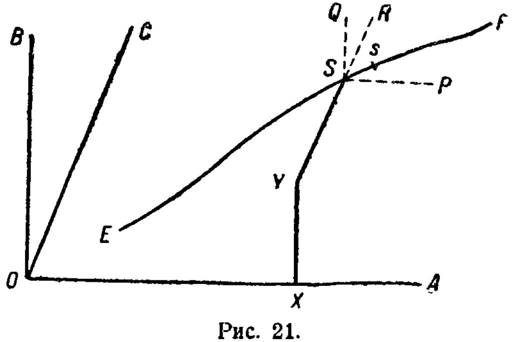

Рис. 21.

которого равна A, движется по линии ESF. Пусть по истечении времени t оно достигло точки S.

Опустим из этой точки перпендикуляр SY на плоскость AOB, а из Y — перпендикуляр YX на OA, так что получаются три координаты

$$OX = x,$$

$$XY = y,$$

$$YS = z,$$

перпендикулярные друг к другу и параллельные осям.

Пусть пройденный путь $ES = s$, так что

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

а скорость в точке S равна

$$\frac{ds}{dt} = v.$$

Какие бы силы ни действовали на тельце в точке S, их всегда можно свести к тем же трем направлениям.

Итак, на тело будут действовать три силы $SP = P$, $SQ = Q$, $SR = R$; согласно изложенному выше, их действие может быть определено с помощью следующих трех уравнений:

$$d^2x = \frac{2gP\,dt^2}{A},$$

$$d^2y = \frac{2gQ\,dt^2}{A},$$

$$d^2z = \frac{2gR\,dt^2}{A},$$

в которых элемент dt принят постоянным.

Далее, смотря по тому, зависят ли силы P, Q и R от координат x, y и z или также от скорости

$$\frac{ds}{dt}=v,$$

следует из анализа брать соответствующие способы решения задачи. А здесь пока будет целесообразно отметить, что в силу того, что

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

и того, что

$$v^2=\frac{ds^2}{dt^2},$$

следовательно, и того, что

$$v\,dv=\frac{ds\,d^2s}{dt^2}=\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2},$$

будет иметь место уравнение

$$v\,dv=\frac{2g}{A}(P\,dx+Q\,dy+R\,dz).$$

С помощью этого уравнения и определяется скорость тельца.

Для определения же кривой положим

$$dy=p\,dx,\quad dz=q\,dx,$$

так что мы получаем

$$ds=dx\sqrt{1+p^2+q^2}$$

и

$$v=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

А так как

$$d^2y = p\,d^2x + dp\,dx$$

и

$$d^2z = q\,d^2x + dq\,dx,$$

то, подставив вместо d^2x его значение, равное $\frac{2gP\,dt^2}{A}$, мы получаем

$$dp\,dx = \frac{2g\,dt^2}{A}(Q - Pp),$$

$$dq\,dx = \frac{2g\,dt^2}{A}(R - Pq).$$

Если же вместо dt^2 подставить его значение

$$\frac{dx^2\,(1 + p^2 + q^2)}{v^2},$$

то мы будем иметь

$$dp = \frac{2g\,dx\,(1 + p^2 + q^2)}{Av^2}(Q - Pp),$$

$$dq = \frac{2g\,dx\,(1 + p^2 + q^2)}{Av^2}(R - Pq)$$

или

$$Q\,dx - P\,dy = \frac{Av^2\,dp}{2g\,(1 + p^2 + q^2)},$$

$$R\,dx - P\,dz = \frac{Av^2\,dq}{2g\,(1 + p^2 + q^2)}.$$

Если теперь вместо p и q подставить их значения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$, то эти два уравнения переходят в следующие:

$$Q\,dx - P\,dy = \frac{Av^2\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{2g\,ds^2},$$

$$R\,dx - P\,dz = \frac{Av^2\,(dx\,d^2z - dz\,d^2x)}{2g\,ds^2}.$$

Если же одно из них разделить на другое, то мы получим

$$P(dz\,d^2y - dy\,d^2z) + Q(dx\,d^2z - dz\,d^2x) + \\ + R(dy\,d^2x - dx\,d^2y) = 0.$$

Следствие 1

224. Скорость в каждой точке кривой определяется с помощью диференциального уравнения

$$Av\,dv = 2g(P\,dx + Q\,dy + R\,dz),$$

где $\frac{P\,dx + Q\,dy + R\,dz}{ds}$ обозначает тангенциальную силу, происходящую от сил, действующих на тело.

Следствие 2

225. Для определения кривой достаточно каких-либо двух из следующих трех уравнений:

$$2g\,ds^2(Q\,dx - P\,dy) = Av^2(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = \\ = Av^2\,dx^2\,d\frac{dy}{dx},$$

$$2g\,ds^2(P\,dz - R\,dx) = Av^2(dz\,d^2x - dx\,d^2z) = \\ = Av^2\,dz^2\,d\frac{dx}{dz},$$

$$2g\,ds^2(R\,dy - Q\,dz) = Av^2(dy\,d^2z - dz\,d^2y) = \\ = Av^2\,dy^2\,d\frac{dz}{dy},$$

так как каждые два из них содержат в себе также и третье.

При этом здесь становится излишним рассмотрение постоянного диференциала.

Следствие 3

226. Последнее уравнение [66], свободное от скорости, хотя и содержит в себе диференциалы второго порядка, тем не менее не связано с диференциалом dt, принятым в качестве постоянного. Оно может быть представлено в следующем виде:

$$P\,dz^2\,d\,\frac{dy}{dz} + Q\,dx^2\,d\,\frac{dz}{dx} + R\,dy^2\,d\,\frac{dx}{dy} = 0.$$

Примечание

227. Три силы P, Q и R, которые, согласно условию, действуют на тельце в точке S, сводятся к одной силе, которая равна

$$\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2},$$

и если последнюю обозначить через V, то ее направление образует с SP угол, косинус которого равен $\frac{P}{V}$, с SQ — угол, косинус которого равен $\frac{Q}{V}$, и с SR — угол, косинус которого равен $\frac{R}{V}$.

Далее, если направление этой силы V образует с направлением движения Ss угол, равный ω, то ускоряющая сила, т. е. сила, действующая по направлению Ss, будет равна $V \cos \omega$, а так как она в то же время равна

$$\frac{P\,dx + Q\,dy + R\,dz}{ds},$$

то мы имеем

$$\cos \omega = \frac{P\,dx + Q\,dy + R\,dz}{V\,ds}.$$

Положение нормальной силы $V \sin \omega$ наиболее удобно изображается с помощью сферической тригонометрии. Представим себе, что точка S (рис. 22) является центром сферы и из нее к поверхности сферы проведены прямые линии SP, SQ и SR так, что дуги PQ, PR и QR являются квадрантами. Направление движения пусть проходит через s, а среднее направление сил — через V; тогда мы имеем:

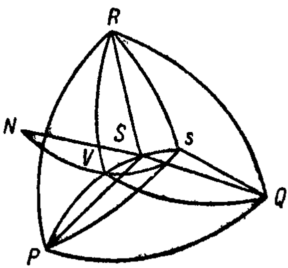

Рис. 22.

$$\cos Ps = \frac{dx}{ds}, \quad \cos Qs = \frac{dy}{ds}, \quad \cos Rs = \frac{dz}{ds},$$

$$\cos PV = \frac{P}{V}, \quad \cos QV = \frac{Q}{V}, \quad \cos RV = \frac{R}{V}$$

и, сверх того,

$$Vs = \omega,$$

или

$$\cos \omega = \frac{P\,dx + Q\,dy + R\,dz}{V ds}.$$

Если угол ω известен, а угол sVN мы принимаем равным квадранту, то прямая линия, проведенная из центра S через N, представит собой направление нормальной силы, положение же точки N определится при помощи ее расстояний от точек P, Q и R таким образом, что получаются следующие соотношения:

$$\cos PN = \frac{P}{V\sin\omega} - \frac{dx\cos\omega}{ds\sin\omega},$$

$$\cos QN = \frac{Q}{V\sin\omega} - \frac{dy\cos\omega}{ds\sin\omega},$$

$$\cos RN = \frac{R}{V\sin\omega} - \frac{dz\cos\omega}{ds\sin\omega}\left[{}^{67}\right].$$

Поскольку прямых линий, нормальных к направлению движения Ss, существует бесчисленное множество,— из них определяется та линия, вдоль которой действует нормальная сила, искривляющая направление движения таким образом, что радиус кривизны падает на самую прямую линию SN; радиус этот будет равен

$$\frac{Av^2}{2gV\sin\omega}$$

(§ 207).

Задача 17

228. *Тельце, масса которого равна A, движется в трубке или в канале, не подвергаясь действию никаких сил. Определить его движение и давление, производимое им повсюду на трубку.*

Решение

Пусть ESF (рис. 21) — форма трубки, в которой движется тельце; пусть по истечении времени t оно, пройдя путь $ES = s$, достигло точки S. Последнюю по примеру прежнего отнесем к трем взаимно перпендикулярным осям OA, OB и OC и назовем проведенные параллельно им координаты

$$OX = x,$$

$$XY = y,$$

$$YS = z.$$

Так как тельце вынуждено всюду следовать направлению трубки, то последняя несомненно оказывает на него действие в виде сил, которые, однако, таковы, что под их действием скорость движения не претерпевает никакого изменения.

Итак, скорость будет постоянна; пусть она будет равной c; тогда мы имеем

$$\frac{ds}{dt} = c$$

и

$$s = ct.$$

Отнесем силы, развиваемые трубкой, к тем же трем осям и пусть

$$SP = X,$$

$$SQ = Y,$$

$$SR = Z.$$

Тогда, ввиду того что скорость остается неизменной, мы имеем

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Так как, далее,

$$dt = \frac{ds}{c},$$

то вместо dt постоянным будет элемент ds, и мы, таким образом, получаем основные формулы:

$$Ac^2\,d^2x = 2gX\,ds^2,$$
$$Ac^2\,d^2y = 2gY\,ds^2,$$
$$Ac^2\,d^2z = 2gZ\,ds^2,$$

при наличии равенства

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

Ввиду этого вся сила, развиваемая трубкой по отношению к малому тельцу, будет равна

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{Ac^2\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}{2g\,ds^2} = V,$$

направление же ее составляет с прямой SP угол, косинус которого равен

$$\frac{X}{V} = \frac{d^2x}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}},$$

с линией SQ — угол, косинус которого равен

$$\frac{Y}{V} = \frac{d^2y}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}},$$

и с линией SR — угол, косинус которого равен

$$\frac{Z}{V} = \frac{d^2z}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}.$$

Но этой силе равно и противоположно по направлению то давление, которое тельце производит на трубку.

Следствие 1

229. Если радиус кривизны кривой в точке S положить равным r, то, принимая во внимание, что нормальная сила равна V и скорость равна c, мы будем иметь

$$r = \frac{Ac^2}{2gV}$$

или

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}},$$

где ds принят постоянным.

Следствие 2

230. Положение радиуса кривизны совпадает с направлением силы V, и потому он образует с прямой SP угол, косинус которого равен $\frac{d^2x}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}$, с прямой SQ — угол, косинус которого равен $\frac{d^2y}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}$, и с прямой SR — угол, косинус которого равен $\frac{d^2z}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}$.

Примечание

231. Мы могли бы здесь исследовать и тот случай движения, когда тельце вынуждено перемещаться

не по заданной линии, а по заданной поверхности, но так как этот вопрос уже был подробно изложен во второй книге механики, то я, чтобы здесь не слишком распространяться, его теперь касаться не буду; тем более, что здесь, очевидно, все дело сводится к тому, что направление силы, развиваемой поверхностью по отношению к тельцу, должно быть нормально к этой поверхности.

Пользуясь данными уравнениями поверхности, определяют положение нормали, т. е. углы, образуемые ею с направлениями SP, SQ и SR; это направление должно совпасть с ранее определенным положением силы V. Отсюда получается новое уравнение между координатами x, y и z, а если последнее связать с первым, то получается путь, пройденный тельцем на поверхности. Что последний представляет собой кратчайший путь между конечными его точками, — это ясно само по себе.

Возвращаясь к свободному движению, я покажу, каким образом движение, происходящее не в одной плоскости, можно удобно определять с помощью углов, отнесенных к определенной неподвижной точке, т. е. тем способом, который я подробно изложил выше, в задаче 5 (§ 70). Так как этот способ является чрезвычайно плодотворным в теоретической астрономии, а в предыдущих книгах подобное разложение движения не было показано, — мы посвятим ему следующую задачу.

Задача 18

232. *Тельце находится частью под действием сил, направленных к точке O* (рис. 23), *частью под*

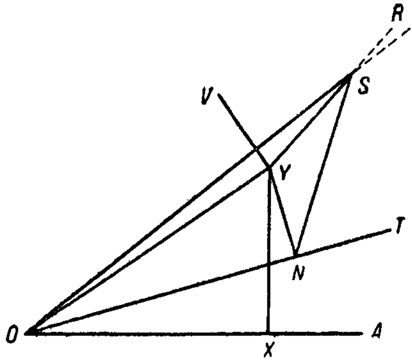

Рис. 23.

действием каких-либо других сил. Определить движение тельца по отношению к этой точке.

Решение

Представим себе плоскость — пусть это будет плоскость чертежа, — проходящую через неподвижную точку O, к которой мы относим движение, и возьмем на ней неподвижную ось OA. Пусть по истечении времени t тельце достигло точки S. Опустим из этой точки перпендикуляр SY на плоскость чертежа, а из Y — перпендикуляр YX на прямую OA, так что мы будем иметь три прямоугольных координаты:

$$OX = x,$$
$$XY = y,$$
$$YS = z.$$

Тельце в точке S прежде всего находится под действием силы, направленной по SO. Разложим эту силу по направлениям YO и SY. Что касается остальных сил, то мы их отнесем к тем же двум направлениям, а также к линии YV, перпендикулярной к OY в плоскости чертежа. Таким образом у нас будут всего три силы: первая, имеющая направление вдоль YO, равна V, вторая — вдоль YV — равна S и третья — вдоль SR — равна R; эти силы нам известны [68]. Отнесем их к направлениям координат и, обозначив угол AOY через φ, мы получим следующие силы:

$$\text{вдоль } XO \text{ сила} = V\cos\varphi + S\sin\varphi = -P,$$
$$\text{вдоль } YX \text{ сила} = V\sin\varphi - S\cos\varphi = -Q,$$
$$\text{вдоль } SR \text{ сила} = R.$$

Действия этих сил будут выражены следующими тремя формулами:

$$A\,d^2x = -2g\,dt^2\,(V\cos\varphi + S\sin\varphi),$$
$$A\,d^2y = -2g\,dt^2\,(V\sin\varphi - S\cos\varphi),$$
$$A\,d^2z = 2gR\,dt^2,$$

причем масса тельца принята равной A.

Если обозначить расстояние OY через u, то в силу того, что

$$x = u\cos\varphi,$$

$$y = u\sin\varphi,$$

полученные два уравнения, как это было показано выше (§ 217), примут следующий вид:

$$\text{I. } d^2u - u\,d\varphi^2 + \frac{2gV\,dt^2}{A} = 0,$$

$$\text{II. } u\,d^2\varphi + 2du\,d\varphi - \frac{2gS\,dt^2}{A} = 0.$$

Если через ψ обозначить угол SOY, который называется широтой тельца, — в то время как угол $AOY = \varphi$ называется его долготой, — то мы получаем

$$SY = z = u\operatorname{tg}\psi.$$

Для более удобного определения угла ψ возьмем линию узлов OT, причем

$$\text{угол } AOT = \omega,$$

и пусть угол между плоскостью, проведенной через точку O и через направление движения в точке S, и основной плоскостью (чертежа) равен ϱ. Тогда мы получим, что

$$\text{угол } TOY = \varphi - \omega.$$

Если, далее, провести линии YN и SN перпендикулярно к OT, то

$$ON = u\cos(\varphi - \omega)$$

и

$$YN = u\sin(\varphi - \omega).$$

Следовательно,

$$YS = u \sin(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho = z$$

и

$$\operatorname{tg} \psi = \sin(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho \text{ [69]}.$$

Как и раньше (§ 70), мы имеем

$$\frac{d\omega}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)} = \frac{d\varrho}{\sin \varrho \cos \varrho} = d \ln \operatorname{tg} \varrho.$$

А так как отсюда

$$d\varrho = \frac{d\omega \sin \varrho \cos \varrho}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)},$$

то мы получаем

$$dz = du \sin(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho + \\ + u\,(d\varphi - d\omega) \cos(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho + \\ + u \sin(\varphi - \omega) \frac{d\omega \operatorname{tg} \varrho}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)}$$

или

$$dz = [du \sin(\varphi - \omega) + u\, d\varphi \cos(\varphi - \omega)] \operatorname{tg} \varrho \text{ [70]}.$$

После повторного диференцирования это дает

$$d^2z = [d^2u \sin(\varphi - \omega) + \\ + du\,(2d\varphi - d\omega) \cos(\varphi - \omega) + \\ + u\, d^2\varphi \cos(\varphi - \omega) - \\ - u\, d\varphi (d\varphi - d\omega) \sin(\varphi - \omega)] \operatorname{tg} \varrho + \\ + [du \sin(\varphi - \omega) + \\ + u\, d\varphi \cos(\varphi - \omega)] \frac{d\omega \operatorname{tg} \varrho}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)}$$

или

$$d^2z = \Big[d^2u \sin(\varphi - \omega) + 2du\, d\varphi \cos(\varphi - \omega) + \\ + u\, d^2\varphi \cos(\varphi - \omega) - u\, d\varphi^2 \sin(\varphi - \omega) + \\ + \frac{u\, d\varphi\, d\omega}{\sin(\varphi - \omega)}\Big] \operatorname{tg} \varrho.$$

Отсюда ввиду того что

$$d^2u - u\,d\varphi^2 = -\frac{2gV\,dt^2}{A}$$

и

$$u\,d^2\varphi + 2du\,d\varphi = \frac{2gS\,dt^2}{A},$$

мы получаем

$$d^2z = \left[-\frac{2gV\,dt^2}{A}\sin(\varphi-\omega) + \right.$$

$$\left. + \frac{2gS\,dt^2}{A}\cos(\varphi-\omega) + \frac{u\,d\varphi\,d\omega}{\sin(\varphi-\omega)}\right]\operatorname{tg}\varrho.$$

Но так как

$$d^2z = \frac{2gR\,dt^2}{A},$$

то

$$\frac{u\,d\varphi\,d\omega}{\sin(\varphi-\omega)} = \frac{2g\,dt^2}{A}[V\sin(\varphi-\omega) -$$

$$- S\cos(\varphi-\omega) + R\operatorname{ctg}\varrho]$$

или

$$d\omega = \frac{2g\,dt^2\sin(\varphi-\omega)}{Au\,d\varphi}[V\sin(\varphi-\omega) -$$

$$- S\cos(\varphi-\omega) + R\operatorname{ctg}\varrho]$$

и

$$d\ln\operatorname{tg}\varrho = \frac{2g\,dt^2\cos(\varphi-\omega)}{Au\,d\varphi}[V\sin(\varphi-\omega) -$$

$$- S\cos(\varphi-\omega) + R\operatorname{ctg}\varrho].$$

Итак, мы нашли четыре уравнения, в которых содержится решение поставленной задачи [71].

Следствие 1

233. Следовательно, для данного времени t нам должны быть даны четыре величины: u, φ, ω и ϱ. Тогда мы имеем, во-первых, два диференциальных уравнения второго порядка, а именно:

$$d^2u - u\,d\varphi^2 + \frac{2gV\,dt^2}{A} = 0,$$

$$u\,d^2\varphi + 2du\,d\varphi - \frac{2gS\,dt^2}{A} = 0,$$

и следующие два диференциальных уравнения первого порядка, а именно:

$$d\omega = \frac{2g\,dt^2 \sin(\varphi - \omega)}{Au\,d\varphi}\,[V\sin(\varphi - \omega) -$$

$$- S\cos(\varphi - \omega) + R\operatorname{ctg}\varrho],$$

$$d\ln\operatorname{tg}\varrho = \frac{d\omega}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)},$$

или, иначе:

$$d\operatorname{tg}\varrho = \frac{d\omega\operatorname{tg}\varrho}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)}.$$

Следствие 2

234. Когда эти величины найдены, тогда можно определить и угол $SOY = \psi$, называемый „широтой“, и расстояние SO. Это осуществляется с помощью следующих формул:

$$\operatorname{tg}\psi = \sin(\varphi - \omega)\operatorname{tg}\varrho$$

и

$$OS = \frac{u}{\cos\psi}.$$

Величину u обычно называют „укороченным расстоянием".

Следствие 3

235. Если

$$\sin(\varphi - \omega) = 0,$$

т. е. если тельце проходит через неподвижную плоскость, то мы получаем, что

$$d\omega = 0.$$

В то же время очевидно, что если имеет место

$$V \sin(\varphi - \omega) - S \cos(\varphi - \omega) + R \operatorname{ctg} \varrho = 0,$$

то как линия узлов, так и угол наклона не претерпевают никаких изменений.

Следствие 4

236. Но имеется соотношение

$$V \sin(\varphi - \omega) - S \cos(\varphi - \omega) = -Q \cos \omega + P \sin \omega,$$

так что если мы введем в последнее равенство первоначальные силы P, Q и R, то получим

$$V \sin(\varphi - \omega) - S \cos(\varphi - \omega) +$$
$$+ R \operatorname{ctg} \varrho = P \sin \omega - Q \cos \omega + R \operatorname{ctg} \varrho.$$

Здесь мы имеем нечто вроде силы, изменяющей положение линии узлов и угол наклона.

Примечание

237. Заслуживает быть особенно отмеченным то, что этот довольно искусный метод дает возможность

выразить мгновенное изменение положения линии узлов и угла наклона, что для теоретической астрономии представляет очень большое удобство. Пользуясь им, геттингенский профессор Майер [72] с невероятным прилежанием составил прекрасные лунные таблицы, в которых нужно видеть величайшее достижение астрономии.

Ввиду того, однако, что движение Луны, определяемое по этому методу, ни в коем случае не является абсолютным, а отнесено к центру Земли, при подобном исследовании следует также принимать во внимание и движение Земли. Следовательно, для того чтобы иметь возможность пользоваться этим методом, мы должны сначала изложить приемы, с помощью которых относительные движения можно было бы сводить к вычислениям — при том, конечно, условии, что движение того тела, по отношению к которому определяется движение других тел, известно.

Так как этот вопрос был недостаточно ясно изложен в прежних книгах механики, то я здесь разберу его с большей тщательностью; а выполнив это, мы сможем с большим успехом перейти к рассмотрению движений конечных тел, которых я там совсем не касался.

ПРИМЕЧАНИЯ

1 (к стр. 29). „Mechanica sive motus scientia analytice exposita“ вышла в первом издании на латинском языке в 1736 г. в Петербурге (Petropoli) в издании Петербургской академии наук. Книга вышла в двух томах in-quarto. Первый том содержит 480, второй — 500 страниц.

Перевод для настоящего издания сделан по изданию Leonhardi Euleri Opera omnia sub auspiciis societatis scientiarum naturalium helveticae, series II, vol. I, под ред. П. Штеккеля (Teubner, 1912).

2 (к стр. 31). Понятие „сила“ Эйлер выражает как через термин „potentia“, так и через „vis“. Можно заметить, что „potentia“ у Эйлера выражает научное, механическое понятие силы, другое же слово „vis“ скорее соответствует обыденному значению силы. Однако это различие нельзя провести со всей последовательностью.

3 (к стр. 32). Речь идет о сочинении Varignon, Nouvelle Mécanique ou Statique („Новая механика или статика“), изданном в Париже в 1725 г., уже после смерти автора. Вариньон (1654—1722) — французский математик и механик. Исходя из рычага и пра-

вила параллелограма сил, Вариньон в указанном сочинении выводил условия равновесия всех простых „машин“. Во втором томе он опирается и на принцип виртуальных скоростей, с которым его познакомил Иоганн Бернулли (в письме от 1717 г.).

4 (к стр. 32). Христиан Вольф (Wolff) — немецкий философ и математик, последователь и систематизатор учения Лейбница (1679—1754). Эйлер говорит — о сочинении Вольфа „Elementa matheseos universae“ — „Начала всех математических наук“ (1713—1715), вышедшем ранее на немецком языке под заглавием „Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften“ 1710).

5 (к стр. 33). Герман (Hermann) — швейцарский математик (1678—1733). Был профессором в Падуе, во Франкфурте-на-Одере, в 1725 г. был членом Петербургской академии наук. Наиболее известное сочинение его: „Phoronomia, seu de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum“ — „Форономия, или о силах и движениях твердых и жидких тел“. Оно было напечатано в лейпцигском журнале „Acta eruditorum“ за 1716 г.

6 (к стр. 36). „Vim insitam“. Под этим именем Эйлер, как и Ньютон, понимал инерцию тела.

7 (к стр. 40). „Corollarium“.

8 (к стр. 41). „Scholion“. Под этой рубрикой Эйлер приводит нередко философские рассуждения об употребляемых им понятиях. В „Примечаниях“ Эйлер часто указывает, в какой степени справедливы его формальные рассуждения, содержащиеся в предложениях и следствиях, или же что они имеют ограниченное применение к действительности и практике.

Для истории развития принципов механики этого рода „Примечания“ имеют первостепенное значение.

9 (к стр. 46). „Что и требовалось доказать“. В подлиннике стоит „Q. E. D.“ (Quod erat demonstrandum). Такой припиской сопровождалось во время Эйлера и до него доказательство всякой теоремы.

10 (к стр. 50). В первом издании ошибочно поставлено 23 вместо 24 (примечание Штеккеля).

11 (к стр. 50). Настоящее примечание является иллюстрацией того, как непосредственная практика „врывается“ в формально логическую математическую систему механики. В примечании считалось разрешенным упоминать „даже“ о практике моряков.

12 (к стр. 54). Здесь имеется в виду так называемый „прусский фут“, который немного длиннее старого русского фута и равен 31,4 *см.*

13 (к стр. 56). „Что и требовалось найти“. В подлиннике стоит: „Q. E. I“(Quod erat inveniendum). Такой припиской сопровождалось во время Эйлера и до него решение всякой задачи.

14 (к стр. 58). Обозначим AM через x, а MN — через y. Тогда мы будем иметь уравнение кривой AN:

$$y = x^n,$$

где $n < 1$. Из этого уравнения следует, что тангенс угла наклона касательной к этой кривой равен

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

При $x = 0$ и при условии, что

$$n < 1,$$

эта величина обращается в бесконечность. Следовательно, касательная в точке A перпендикулярна к оси AM.

Если, наоборот, касательная в A образует с AM острый угол, то при

$$x = 0$$

это возможно только в том случае, когда

$$n > 1.$$

Но в § 38 показано, что в таком случае время движения по AM будет бесконечно велико (Вольферс).

15 (к стр. 66). Поясним это решение.

Найдя, что искомая скорость равна

$$c = \frac{ds}{dt},$$

Эйлер пользуется тем, что $\frac{dt}{ds}$ равен тангенсу угла наклона касательной к кривой времен в точке T, и строит равным этому углу угол MTO, образованный нормалью TO и ординатой MT. Но

$$\operatorname{tg} MTO = \frac{MO}{MT}.$$

Отсюда

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\operatorname{tg} MTO} = \frac{MT}{MO}.$$

Далее, остается только построить ординату MN, равную $\frac{MT}{TO}$. Для этого Эйлер составляет пропорцию

$$\frac{MN}{1} = \frac{MT}{MO}$$

и строит треугольник MQN, подобный MTO со стороной $MQ = 1$. В таком случае другая сторона MN этого треугольника и будет ординатой кривой скоростей, соответствующей точке M.

16 (к стр. 67). „Аполлониевой параболой“ является обычная парабола второго порядка, названная таким образом по имени древнегреческого геометра Аполлония из Перги, жившего во второй половине III в. до н. э. и написавшего сочинение „О конических сечениях“.

17 (к стр. 76). „Vis inertiae“. Здесь „сила инерции“ обозначает совсем не то, что сейчас понимают под этим в механике. У Эйлера и других авторов того времени это означало инерцию, — но инерцию, обладающую определенной мерой. „Сила инерции“ означает определенную величину инерции. Эта величина определяется массой тела или, наоборот, она определяет массу. См в тексте § 142 (стр. 116 наст. изд.).

18 (к стр. 90). Здесь Эйлером намечена обширная программа исследований по механике, из которой им выполнена только часть. В „Механике“, изданной в 1736 г. (2 тома), захватывается только первая проблема — движение точек, свободное и несвободное. Вторая проблема — движение твердого тела — подверглась рассмотрению у Эйлера в специальном сочинении, изданном в 1765 г. („Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum“), сочинении, которое можно рассматривать и как третий том его „Механики“.

Что касается других проблем, то здесь Эйлеру принадлежит ряд классических исследований и открытий (теория упругости, гидродинамика).

19 (к стр. 92). Трудно переводимое определение: сила (potentia) определяется через силу (vis). Последний термин мы заменили термином „усилие“. См. примечание 2.

20 (к стр. 98). Хотя в современной механике и нет деления сил на абсолютные и относительные, как у Эйлера, тем не менее читателю нетрудно будет понять, какой смысл вкладывая Эйлер в их различение; это особенно становится ясным из § 116.

21 (к стр. 101). „Tempusculum“ Эйлер употребляет как синоним „элемента времени“, „бесконечно малого времени“. В таком же смысле Эйлер говорит слово „lineola“, которое мы переводим „отрезочек“, и „corpusculum“ — тельце.

22 (к стр. 106). В подлиннике в этой формуле опечатка, бывшая в первом издании и не исправленная Штеккелем: в знаменателе стоит dz, а не dt.

23 (к стр. 107). Здесь Эйлер отрезок dz считает во всех случаях положительным.

24 (к стр. 114). Буква, которой называется точка („точка a“, „точка b“ и т. д.), обозначает у Эйлера величину массы данной материальной точки. Вместо того чтобы говорить (как говорят сейчас): „точка массы a“, Эйлер и другие авторы того времени говорили: „точка a“. Вместо того чтобы говорить: „масса точки a больше массы точки b“, тогда говорили: „точка a больше точки b“.

Понятие массы тела совершенно не отделялось от понятия количества материи в этом теле. См. в тексте § 139.

25 (к стр. 115). Это весьма существенное „примечание“ раскрывает то, какой смысл вкладывал Эйлер (и современные ему механики) в понятие „масса“. Эйлер связывает массу с количеством материи или с количеством „точек“, составляющих тело. Для атомистов это было количество атомов. Настоящее „примечание“ Эйлера проливает свет и на то, почему Ньютон в своих „Principia“ массу определяет через плотность, а не наоборот. Так делал он потому, что плотность у него связывалась не с массой (в единице объема), а с количеством атомов в единице объема. Настоящее место из „Механики“ Эйлера это полностью подтверждает и выясняет.

26 (к стр. 117). Здесь Эйлер сравнивает силу инерции (см. примечание 17) с приложенной силой, указывая, что это — совершенно различные понятия.

27 (к стр. 123). В предложениях 19 и 20 Эйлер устанавливает то, что составляет содержание второго закона Ньютона. По форме эти теоремы также напоминают этот закон в том смысле, что, как и Ньютон, Эйлер говорит не об ускорении, а о приращении скорости (или диференциале, что тогда не различалось).

Весьма характерно для Эйлера то, что первым же следствием из предложения 19 он выводит по существу уравнение живых сил (см. особенно § 157). Этим уравнением Эйлер весьма широко пользуется во всех дальнейших вычислениях, почему он и оценил его так высоко.

В то же время Эйлер не указывает физического смысла этого уравнения, не видя в нем в явной форме даже „живых сил“, о которых в то время существовала немалая литература (Лейбниц, Иоганн Бернулли).

Как видно из текста, Эйлер лишь устанавливает пропорциональность величин $c\,dc$ и $p\,ds$, где c — скорость, p — сила, ds — элемент пути. Ему, несомненно, было ясно, что $c\,dc$ — это величина, пропорциональная диференциалу „живой силы" mc^2 (как ее обозначали Лейбниц и Бернулли), но, не зная физического смысла другого выражения pds, Эйлер не мог сделать никаких выводов. Только тогда, когда техническая практика привела к более или менее отчетливому понятию работы, только тогда указанное уравнение Эйлера получило более удовлетворительную интерпретацию.

Надо, однако, оговориться, что в статике И. Бернулли и Вариньона уже было явное понятие работы (под названием „энергии"), но и там ее физический смысл был далеко не ясен. См. письмо И. Бернулли к Вариньону 1717 г., на русском языке: И. Бернулли. Избранные сочинения по механике, перевод под ред. В. П. Егоршина (в Приложении).

28 (к стр. 124). Daniel Bernoulli, Examen principiorum mechanicae („Исследование о принципах механики"). Comment. acad. sc., Petrop., I (1726), 1728, p. 126—141; см. особенно p. 127. (Примечание П. Штеккеля).

29 (к стр. 133). Joh. Bernoulli, De motu gravium, pendulorum et projectilium („О движении тяжелых тел, маятников, а также брошенных тел") Acta erud. Lips., 1713; Opera omnia, t. I, Lausannae et Genevae, 1742, p. 531. (Примечание П. Штеккеля).

30 (к стр. 133). „Vis restituens".

31 (к стр. 136). В этом месте функция $\sin DAC$ выражается у Эйлера символом

$$\int DAC.$$

Функция синуса, как видим, обозначалась им той же стилизованной буквой S, что и интеграл. Современной символики тогда еще никто не употреблял. Заслугой Эйлера является то, что он ввел в широкое употребление именно этот краткий символ для синуса, который перешел в нынешний символ sin. До Эйлера, как правило, тригонометрические функции обозначались каждый раз по-разному (например, синусы обозначались буквами k, p, q, r, s, t и т. д.).

Впрочем, надо заметить, что уже Валлис (Wallis, 1616—1703) определенными буквами обозначал все шесть тригонометрических функций (S, Σ, T, τ, s, σ).

32 (к стр. 144). В настоящем „Примечании" Эйлер дает план первого тома своей механики, посвященного, как это мы видели выше, движению свободной точки. Из „Примечания" видно, что вторая глава имеет для всего тома наиболее принципиальное значение. В остальных главах будет приводиться множество отдельных задач, при решении которых будут применяться принципы второй главы.

33 (к стр. 152). Таким образом ускорение силы тяжести в „наших" широтах Эйлер принимает за единицу, и масса тела A у него численно делается равной весу этого тела в „наших" широтах.

34 (к стр. 154). После остроумных, хотя и несколько сложных, преобразований Эйлер приходит к уравнению

$$A\,dv = p\,ds;$$

где A — масса тела, v — квадрат его скорости, p — сила, s — длина пути. Это уравнение с точностью до постоянного множителя тождественно с современным уравнением живых сил в диференциальной форме. Этому уравнению Эйлер приписывает огромнейшее значение, и он дает его, в сущности, уже в самом начале настоящей главы (см. § 193). И все же Эйлер не видит в нем понятия „живой силы". См. выше, примечание 27.

35 (к стр. 156). „Vis potentiae absoluta" буквально: „абсолютная сила силы" или „абсолютная величина силы". Это понятие соответствует у Эйлера „абсолютной величине силы" у Ньютона, который отличал от нее ускорительную величину силы (соответствующую современному понятию напряжения поля силы) и движущую величину силы (дающую динамическую меру силы).

36 (к стр. 161). Для понимания всего рассуждения Эйлера необходимо напомнить, что он пользуется особыми соотношениями размерностей. См. примечание 33.

37 (к стр. 176). Надо, очевидно, подразумевать не „скорость c", а „скорость, соответствующую высоте c". Эйлер настолько широко пользуется связью скорости с высотой, что говорит очень кратко об одном вместо другого без всяких оговорок.

Объективно все это имеет тот смысл, что Эйлер вплотную подходит к уравнению живых сил.

38 (к стр. 182). „Центростремительная сила" у Эйлера, как и у Ньютона, означает то, что теперь называется центральной силой.

39 (к стр. 199). Эйлер впервые ввел букву π для обозначения отношения длины окружности к своему диаметру. Ф. Рудио в статье „Обзор истории задачи

о квадратуре круга от древности до наших дней" (приложенной к сборнику Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр, О квадратуре круга, пер. с нем. под ред. акад. С. Н. Бернштейна, ГТТИ, 1934) пишет вслед за Энештрёмом (Bibliotheca mathematica, 1899), что впервые букву π Эйлер употребил в статье „Variae observationes circa series infinitas", относящейся к 1737 г.

Здесь мы должны исправить ошибку, указав, что уже в своей „Mechanica", изданной в Петербурге в 1736 г., Эйлер пользуется символом $\frac{1}{\pi}$ для обозначения отношения диаметра к его окружности и символом π — для обратного отношения.

40 (к стр. 199). Здесь Эйлером получен вывод изохронного характера гармонических колебаний.

41 (к стр. 210). Поясним, следуя Вольферсу, настоящий параграф.

Интеграл из § 290

$$\int \frac{dy}{\sqrt{v}} = \sqrt{\frac{2a^{\frac{2}{2m-1}}}{(2m-1)f^{\frac{2m+1}{2m-1}}}} \int_0^a \frac{y^{\frac{1}{2m-1}}\,dy}{\sqrt{a^{\frac{2}{2m-1}} - y^{\frac{2}{2m-1}}}}$$

мы преобразуем, сделав подстановку

$$y^{\frac{1}{2m-1}} = z$$

и

$$a^{\frac{1}{2m-1}} = b\,.$$

После подстановки мы получим

$$\int \frac{dy}{\sqrt{v}} = b \sqrt{\frac{2(2m-1)}{f^{2m+1/2m-1}}} \int_0^b \frac{z^{2m-1}\,dz}{\sqrt{b^2 - z^2}}.$$

Интеграл находится с помощью рекуррентной формулы

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-1}}{n} \sqrt{1-x^2} + \\ + \frac{n-1}{n} \int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

которая приводит к различным результатам, смотря по тому, четное n или нечетное. Для нечетных n (что будет соответствовать целым значениям m) мы будем иметь

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1, \quad \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3},$$

$$\int_0^1 \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} \quad \text{и т. д.}$$

Для четных n (что будет соответствовать m равным целому числу $+\frac{1}{2}$) мы будем иметь

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{\pi}{2} \quad \text{и т. д.}$$

Применяя только что сказанное к выражению

$$b\sqrt{\frac{2\,(2m-1)}{f^{2m+1/2m-1}}}\int\limits_0^b \frac{z^{2m-1}\,dz}{\sqrt{b^2-z^2}},$$

мы находим для $m=1$:

$$b\sqrt{\frac{2}{f^3}}\int\limits_0^b \frac{z\,dz}{\sqrt{b^2-z^2}}=$$

$$=b^2\sqrt{\frac{2}{f^3}}\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=b^2\sqrt{\frac{2}{f^3}}=\frac{a^2\sqrt{2}}{f\sqrt{f}};$$

для $m=2$:

$$b\sqrt{\frac{2\cdot 3}{f^{5/3}}}\int\limits_0^b \frac{z^3\,dz}{\sqrt{b^2-z^2}}=\frac{2}{3}\,b^4\sqrt{\frac{2\cdot 3}{f^{5/3}}}=$$

$$=\frac{2}{3}\,a^{4/3}\sqrt{\frac{6f}{f^{8/3}}}=\frac{2}{3}\,\frac{a^{4/3}}{f^{4/3}}\sqrt{6f};$$

для $m=3$:

$$b\sqrt{\frac{2\cdot 5}{f^{7/5}}}\int\limits_0^b \frac{z^5\,dz}{\sqrt{b^2-z^2}}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\,b^6\sqrt{\frac{10}{f^{7/5}}}=$$

$$=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\,a^{6/5}\sqrt{\frac{10f}{f^{12/5}}}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\,\frac{a^{6/5}}{f^{6/5}}\sqrt{10f}$$

и т. д.

Далее, для $m = \frac{3}{2}$:

$$b\sqrt{\frac{2\cdot 2}{f^{4/2}}}\int\limits_0^b \frac{z^2\,dz}{\sqrt{b^2-z^2}} =$$

$$= \frac{2b^3}{f}\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{a^{3/2}}{f}\,\pi;$$

для $m = \frac{5}{2}$:

$$b\sqrt{\frac{2\cdot 4}{f^{6/4}}}\int\limits_0^b \frac{z^4\,dz}{\sqrt{b^2-z^2}} =$$

$$= 2b^5\sqrt{\frac{2}{f^{6/4}}}\int\limits_0^1 \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,b^5\pi\sqrt{\frac{2f}{f^{10/4}}} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{a^{5/4}\pi}{f^{5/4}}\sqrt{2f}$$

и т. д.

42 (к стр. 218). Для нахождения интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{-\ln z}} \tag{1}$$

мы положим

$$\sqrt{-\ln z} = t,$$

откуда

$$z = e^{-t^2}$$

и

$$dz = -2te^{-t^2}\,dt.$$

Интеграл (1) после подстановки получит вид:

$$-2\int_{\infty}^{0} e^{-t^2}dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$

Для того чтобы сделать понятными ссылки Эйлера в настоящем параграфе, возьмем интеграл

$$\int_0^1 (-\ln x)^n\,dx$$

и применим к нему рекуррентную формулу:

$$\int (-\ln x)^n\,dx = x(-\ln x)^n + n\int (-\ln x)^{n-1}\,dx =$$

$$= x(-\ln x)^n + nx(-\ln x)^{n-1} +$$

$$+ n(n-1)\int (-\ln x)^{n-2}\,dx =$$

$$= x(-\ln x)^n + nx(-\ln x)^{n-1} +$$

$$+ n(n-1)x(-\ln x)^{n-2} + \ldots +$$

$$+ n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot x + C.$$

Переходя к определенному интегралу и опуская произвольную постоянную, определим значения полученного выражения при предельных значениях. При $x=0$ оно обращается в нуль. В самом деле, последний член, не содержащий логарифма, очевидно равен нулю. Для того чтобы показать, что в нуль обращаются и остальные члены, сделаем подстановку

$$-\ln x = t,$$

откуда

$$x = e^{-t} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{1+t+\frac{t^2}{1\cdot 2}+\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots}.$$

В таком случае

$$x(-\ln x)^n = \frac{t^n}{e^t} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{t^n}+\frac{1}{1!t^{n-1}}+\frac{1}{2!t^{n-2}}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!t}+\frac{1}{n!}+\frac{t}{(n+1)!}+\frac{t^2}{(n+2)!}+\ldots}$$

При $x=0$ новое переменное $t=\infty$. Вставляя в последнее выражение

$$t=\infty,$$

мы находим, что оно действительно обращается в нуль.

Легко видеть, что также в нуль обращаются и все другие члены, содержащие $(-\ln x)$ в степени до первой включительно.

Таким образом значение интеграла при нижнем пределе равно нулю.

При $x = 1$ все первые члены, за исключением последнего, т. е. все члены, содержащие $(-\ln x)$, обращаются в нуль, так как

$$\ln 1 = 0.$$

Остается последний член

$$n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot x,$$

который дает

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)n = n!$$

Это и будет значение искомого интеграла.

Давая n значения 1, 2, 3 и т. д., мы будем иметь

$$\int_0^1 -\ln x\,dx = 1,$$

$$\int_0^1 (-\ln x)^2\,dx = 1\cdot 2,$$

$$\int_0^1 (-\ln x)^3\,dx = 1\cdot 2\cdot 3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_0^1 (-\ln x)^n\,dx = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n.$$

Мы получим, таким образом, упоминаемый Эйлером ряд

$$1,\ 2,\ 6,\ 24,\ \ldots,\ n!,$$

соответствующий последовательному ряду значений числа n.

Данный в задаче интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$$

Эйлер рассматривает как член этого ряда при $n = -\frac{1}{2}$ (*по Вольферсу*).

„Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae" — „Записки Петербургской академии наук", журнал, выходивший с 1727 г. В этом журнале, в томе V, была напечатана статья Л. Эйлера „De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt" — „О трансцендентных рядах, т. е. о рядах, общий член которых не может быть выражен алгебраически".

43 (к стр. 220). Следует обратить внимание, что здесь равны друг другу не два интеграла, а интеграл

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{-\ln z}}$$

и выражение

$$\sqrt{2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}},$$

т. е. кореиь из удвоенного интеграла.

Кроме того, следует заметить, что эти выражения равны друг другу только в том случае, когда интегралы берутся в пределах от нуля до единицы (*по Вольферсу*).

44 (к стр. 227). В этом можно убедиться, если учесть, что кривая AM есть кривая высот v и что

$$\frac{dv}{dy} = p = \frac{y^n}{f^n}.$$

Радиус кривизны кривой AM, равный

$$\frac{\left(1 + \frac{dv}{dy}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2v}{dy^2}},$$

при $y = 0$ обращается в нуль, если $0 < n < 1$. В самом деле,

$$\frac{dv}{dy} = \frac{y^n}{f^n}$$

обращается в нуль, вторая же производная

$$\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{n}{f^n} y^{n-1}$$

при $y = 0$ и при $n - 1 < 0$ обращается в бесконечность (*по Вольферсу*).

45 (к стр. 228). „Temporis puncto".

46 (к стр. 253). В первом издании настоящее следствие ошибочно было формулировано в следующем виде:

„Если

$$n = 1,$$

т. е. если время падения будет пропорционально пройденному пути, то центростремительная сила будет обратно пропорциональна расстоянию“. Исправление сделано П. Штеккелем.

47 (к стр. 263) „Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in huiusmodi corpora cadere possunt, accomodata“. Это сочинение было издано в 1765 г. (Росток и Грейфсвальд), когда Эйлер был директором математического отдела Берлинской академии наук. Сочинение содержало 520 страниц in-quarto. Перевод сделан по этому первому изданию.

„Theoria motus“ можно рассматривать как третий том „Механики“ Эйлера. В соответствии с этим немецкий переводчик Вольферс и объединил все три тома под одним названием.

48 (к стр. 299). В настоящем сочинении Эйлер уже пользуется в механике неподвижными осями координат, введенными впервые Маклореном в 1742 г.

Заметим, что здесь символ sin у Эйлера имеет вид

$$\int in$$

символ же cos — иногда *cos*, иногда $co\int$. См. примечание 31.

49 (к стр. 312). Здесь Эйлер имеет в виду полярные координаты, к которым он и переходит в следующих задачах. Для задачи в пространстве (задача 5)

Эйлер пользуется полярными координатами, несколько отличными от употребляющихся ныне.

50 (к стр. 313). Здесь Эйлер приводит известную формулу для тангенса угла между радиусом-вектором, проведенным в точку на кривой, и касательной к кривой в этой точке. Однако то обоснование этой формулы, которое мы находим здесь у Эйлера, весьма далеко от математической строгости. Не зная теории пределов, Эйлер безоговорочно смешивает дугу кривой с касательной и секущей.

Заметим, что приведенное несколькими строками выше указание, что „полный синус" полагается равным единице, объясняется тем, что во время Эйлера и ранее тригонометрические функции представлялись не в виде отношений, а в виде отрезков. При этом должно было быть указано, чему равен радиус тригонометрической окружности. Этот радиус именовался в данном случае „полным синусом", так как он изображал синус прямого угла.

51 (к стр. 317). Заметим, что Эйлер $\sin^2(\varphi-\omega)$ обозначает через $\sin(\varphi-\omega)^2$, $\cos^2\varrho$ через $\cos\varrho^2$ и т. п.

Предпоследнее равенство

$$OS = \frac{z}{\cos\varrho}\sqrt{\sin^2(\varphi-\omega)+\cos^2(\varphi-\omega)\cos^2\varrho}$$

путем замены $\sin^2(\varphi-\omega)$ через $1-\cos^2(\varphi-\omega)$ принимает вид

$$OS = \frac{z}{\cos\varrho}\sqrt{1-\cos^2(\varphi-\omega)+\cos^2(\varphi-\omega)\cos^2\varrho},$$

или, в окончательном виде

$$OS = \frac{z}{\cos\varrho}\sqrt{1-\cos^2(\varphi-\omega)\sin^2\varrho}.$$

52 (к стр. 321). „De internis motus principiis". Слово „principium" здесь употребляется не в смысле логического принципа, а в смысле субстанциального начала, источника, как это видно из § 75.

53 (к стр. 354). В этом сочинении Эйлер для понятия силы пользуется только словом „vis", тогда как в первых частях „Механики" им употреблялось слово „potentia" (см. примечание 2).

54 (к стр. 372). Словом „действие" мы переводим здесь латинское „effectus".

55 (к стр. 385). Словом „сущность" мы переводим здесь латинское „realitas".

56 (к стр. 386). Под двумя видами материи Эйлер понимает обычные вещества и эфир.

57 (к стр. 389). Эйлер постепенно подходит к соотношению между силой и ускорением. Но до сих пор он говорил о пропорциональности силы и элемента пути, а не ускорения. Это он мог делать, принимая элемент времени dt постоянным и беря только начальный момент движения. В этом случае элемент пути ds можно считать пропорциональным dv или ускорению $\frac{dv}{dt}$. В последних строках Эйлер точно указывает эти условия, переходя в следующем параграфе к общему случаю.

58 (к стр. 404). Здесь сказывается у Эйлера влияние Лейбница, который различал истины необходимые и случайные. Первые, по Лейбницу, рациональны, независимы от опыта и получаются из чистого разума. Примером такой истины считалась математика. Наоборот, случайные истины — это факти-

ческие истины, зависящие от опыта. Такого рода истины видели в физике.

В данном случае Эйлер говорит об уравнениях движения Ньютона, из которых он и стремится вывести всю механику.

59 (к стр. 409). Для понимания настоящего параграфа следует иметь в виду, что хотя во времена Эйлера уже принимался закон тяготения Ньютона, тем не менее еще продолжались споры о физической сущности силы тяготения. Эйлер не хотел видеть в тяжести „притяжение“ (или „тяготение“), действующее „на расстоянии“, и считал необходимым объяснить ее действием эфира — „тонкой материи“ („близкодействие“).

60 (к стр. 416). В подлиннике „Hypothesis“. Это слово, нередко встречаемое в математических сочинениях XVII и XVIII вв., означает не „гипотезу“, а „то, что полагается в основание“. Таков именно первоначальный смысл греческого слова „ὑπόθεσις, означающего „подкладка“, „основа“, „основание“, „принцип“. Поэтому здесь мы переводим это слово как „основное положение“. Слово „hypothesis“ в этих случаях имело не теоретико-познавательный, а скорее формально-логический смысл.

61 (к стр. 435). В подлиннике „motu coacto“.

62 (к стр. 441). Символ

$$\arccos \frac{v}{c}$$

у Эйлера имел вид:

$$A\, co \int \frac{v}{c}.$$

63 (к стр. 416). Поясним этот вывод:

После умножения уравнения II (конец § 217) на $2u^3\,d\varphi$ мы получим:

$$u^4\,d\varphi^2 = \frac{4g\,dt^2}{A}\int Su^3\,d\varphi. \tag{a}$$

Умножая же последнее уравнение из § 219 на u^2, мы получаем

$$u^2\,du^2 + u^4\,d\varphi^2 = \frac{4g\,dt^2}{A}\left[u^2\int Su\,d\varphi - u^2\int V\,du\right].$$

Подставляя в последнее уравнение вместо $u^4 d\varphi^2$ правую часть из уравнения (a), мы после переноса части членов направо будем иметь

$$u^2\,du^2 = \\ = \frac{4g\,dt^2}{A}\left[u^2\int Su\,d\varphi - \int Su^3\,d\varphi - u^2\int V\,du\right]. \tag{b}$$

Первый член в скобках правой части можно представить в следующем виде

$$u^2\int Su\,d\varphi = \int d\left[u^2\int Su\,d\varphi\right],$$

или после диференцирования под знаком интеграла мы будем иметь

$$u^2\int Su\,d\varphi = \int 2u\,du\int Su\,d\varphi + \int u^2 d\int Su\,d\varphi = \\ = 2\int u\,du\int Su\,d\varphi + \int Su^3\,d\varphi.$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (b), мы получим

$$u^2\,du^2 = \frac{4g\,dt^2}{A}\left[2\int u\,du\int Su\,d\varphi - u^2\int V\,du\right].$$

64 (к стр. 447). Когда сила $S = 0$, то на основании § 218

$$u^2\,d\varphi = dt \cdot \text{const},$$

что Эйлер пишет в виде

$$u^2\,d\varphi = f^2\,dt. \tag{c}$$

Подставляя также $S = 0$ в последнее уравнение § 219, мы получим

$$du^2 + u^2\,d\varphi^2 = dt^2 \cdot \text{const} - \frac{4g\,dt^2}{A}\int V\,du,$$

где Эйлер принимает

$$\text{const} = c^2.$$

Вводя это обозначение Эйлера и заменяя во втором члене $u\,d\varphi$ равным ему выражением, полученным из равенства (с), мы получим

$$du^2 = -\frac{f^4\,dt^2}{u^2} - \frac{4g\,dt^2}{A}\int V\,du + c^2\,dt^2.$$

65 (к стр. 447). Последнее выражение получается, если подставить только что найденное выражение для dt в равенство, приведенное в начале § 221:

$$u^2\,d\varphi = f^2\,dt.$$

Опечатки, имеющиеся в этом параграфе в подлиннике, мы исправили.

66 (к стр. 453). Последнее уравнение из § 223.

67 (к стр. 455). Из сферического треугольника NPV сферическая тригонометрия дает нам следующую формулу:

$$\cos PN = \cos NV \cos PV + \sin NV \sin PV \cos NVP,$$

что равно

$$\cos NV \sin PV - \sin NV \sin PV \cos PVs.$$

Но

$$\cos NV = \sin Vs = \sin \omega,$$

$$\sin NV = \cos \omega,$$

$$\cos PV = \frac{P}{V}.$$

Далее, из треугольника PVs мы имеем

$$\cos PVs = \frac{\cos Ps - \cos PV \cos Vs}{\sin PV \sin Vs}.$$

Вставляя все это в первоначальную формулу, мы получим

$$\cos PN = \frac{P}{V} \sin \omega - \frac{\cos \omega \cos Ps}{\sin Vs} + \frac{\cos \omega \cos PV \cos Vs}{\sin Vs}.$$

Но так как

$$\cos PV = \frac{P}{V},$$

$$\sin Vs = \sin \omega,$$

$$\cos Vs = \cos \omega,$$

$$\cos Ps = \frac{dx}{ds},$$

то мы получим

$$\cos PN = \frac{P}{V} \sin \omega - \frac{\cos \omega'' dx}{\sin \omega\, ds} + \frac{P \cos^2 \omega}{V \sin \omega},$$

или после преобразований мы получим окончательно

$$\cos PN = \frac{P}{V \sin \omega} - \frac{\cos \omega\, dx}{\sin \omega\, ds}.$$

Аналогичным путем можно получить и остальные две формулы (*по Вольферсу*).

68 (к стр. 461). Точка S (рис. 23) расположена над плоскостью чертежа, и точка Y является ее проекцией на плоскость. Эйлер здесь пользуется прямоугольными координатами ($OX = x, XY = y$ и $YS = z$), цилиндрическими ($OY = u, \angle AOY = \varphi$ и $YS = z$) и, наконец, в дальнейшем он переходит к особым координатам, представляющим собой нечто среднее между цилиндрическими координатами и „эйлеровыми углами". В данном случае указаны компоненты равнодействующей сил по оси z (компонента R), по радиусу YO (компонента V) и по касательной YV (компонента S). Вслед за этим Эйлер разлагает равнодействующую сил и по прямоугольным осям, обозначая соответствующие компоненты через $-P, -Q$ и R. Знак минус перед P и Q объясняется тем, что Эйлер берет направление соответствующих компонент к центру O.

69 (к стр. 463). Линия OT — линия узлов, т. е. линия пересечения неподвижной плоскости (плоскости чертежа) и плоскости, проведенной через точку O и через касательную к траектории движения в точке S. Она образует с осью OA угол ω (называемый в астрономии *прецессией*). Двугранный угол между

этими указанными плоскостями, измеряемый углом SNY, обозначен Эйлером через ϱ. Это соответствует углу, называемому в астрономии *нутацией*.

Угол ONY прямой, а потому

$$ON = u \cos NOY = u \cos(\varphi - \omega),$$
$$YN = u \sin NOY = u \sin(\varphi - \omega).$$

Но из прямоугольного треугольника SYN

$$YS = z = YN \operatorname{tg} SNY,$$

т. е.

$$z = u \sin(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho.$$

С другой стороны,

$$z = u \operatorname{tg} \psi.$$

Приравнивая эти два выражения, мы получим

$$\operatorname{tg} \psi = \sin(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho.$$

Так, широта ψ выражается через прецессию, нутацию и долготу φ.

Таким образом Эйлер целиком перешел от прямоугольных координат к новым координатам

$$u, \varphi, \omega \text{ и } \varrho,$$

из которых независимых будет, конечно, только три.

70 (к стр. 463). Диференцируя равенство

$$z = u \sin(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho,$$

полученное выше, мы имеем

$$dz = \sin(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho \, du + u \cos(\varphi - \omega) \operatorname{tg} \varrho (d\varphi - d\omega) + \\ + u \sin(\varphi - \omega) \frac{d\varrho}{\cos^2 \varrho}.$$

Вставляя сюда

$$d\varrho = \frac{d\omega \sin\varrho \cos\varrho}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)},$$

мы получим

$$dz = \sin(\varphi - \omega)\operatorname{tg}\varrho\, du + u\cos(\varphi - \omega)\operatorname{tg}\varrho\,(d\varphi - d\omega) + \\ + u\sin(\varphi - \omega)\frac{\operatorname{tg}\varrho\, d\omega}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)}.$$

Производя сокращения, мы получим окончательно

$$dz = \left[\sin(\varphi - \omega)\, du + u\cos(\varphi - \omega)\, d\varphi\right]\operatorname{tg}\varrho.$$

71 (к стр. 464). Из четырех уравнений два приведены последними (они дают $d\omega$ и $d\ln\operatorname{tg}\varrho$), остальные два получены выше (под номерами I и II).

Последнее уравнение получено из соотношения, приведенного ранее, а именно:

$$d\ln\operatorname{tg}\varrho = \frac{d\omega}{\operatorname{tg}(\varphi - \omega)},$$

и из предыдущего уравнения, определяющего $d\omega$.

Таким образом мы получим четыре диференциальных уравнения, из которых нужно находить четыре функции от времени t:

$$u, \ \varphi, \ \omega \ \text{ и } \ \varrho.$$

72 (к стр. 467). Товий Майер (Mayer) — немецкий астроном (1723—1762) составил таблицы движения Луны, воспользовавшись теоретическими данными из книги Эйлера „Теория движения луны“ (Theoria Motus Lunae), изданной в 1753 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ